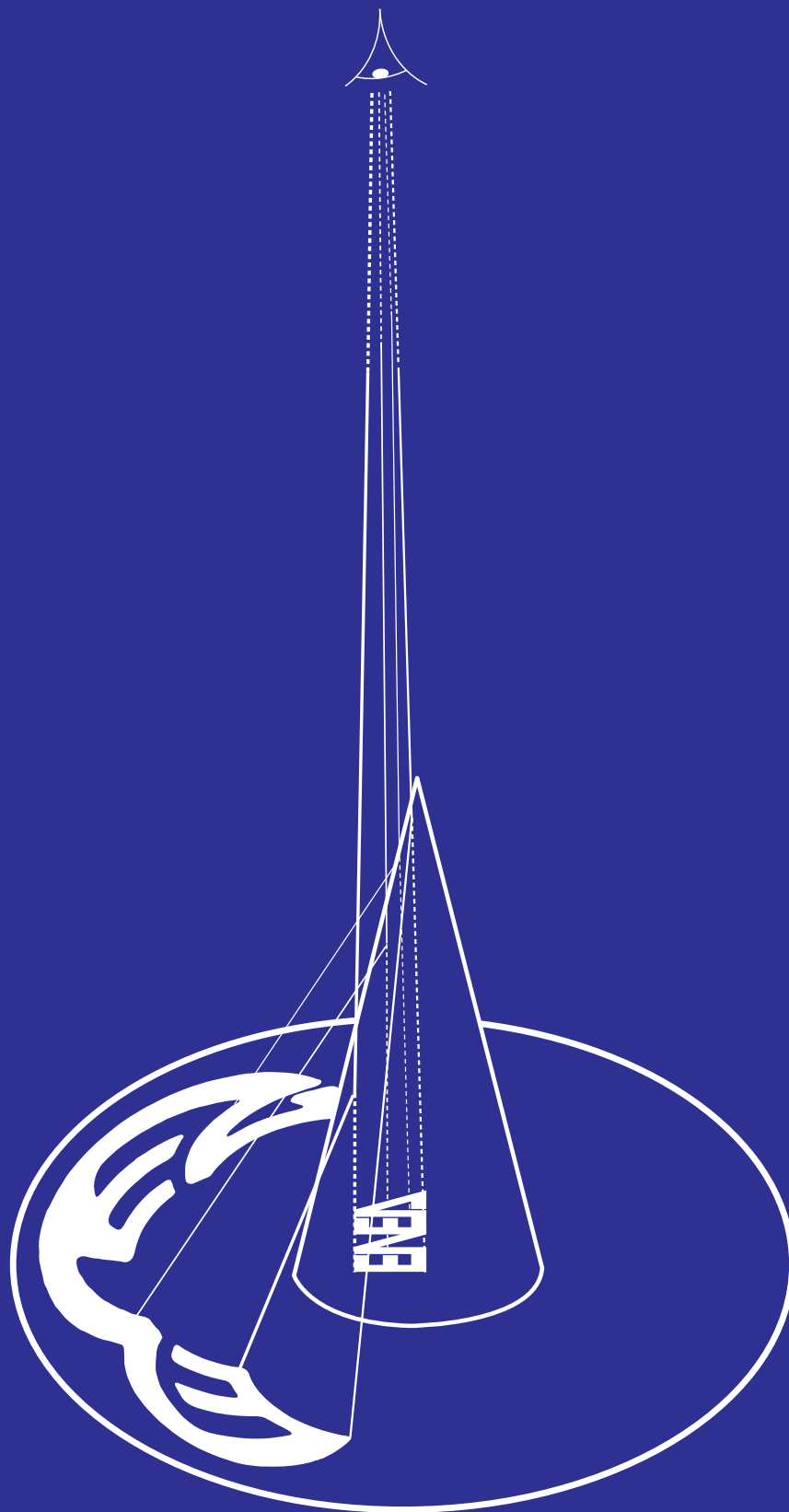


**LE IMMAGINI ANAMORFICHE
IN UN VIAGGIO INTERDISCIPLINARE
TRA ARTE, STORIA, GEOMETRIA E ATTUALITA'**

Paolo Di Lazzaro - Daniele Murra - Pietro Vitelli



**Le immagini anamorfiche in un viaggio interdisciplinare
tra arte, storia, geometria e attualità**

Paolo Di Lazzaro, Daniele Murra, Pietro Vitelli

2019 ENEA

Agenzia nazionale per le nuove tecnologie,
l'energia e lo sviluppo economico sostenibile

ISBN: 978-88-8286-376-0

Revisione editoriale: Giuliano Ghisu

Progetto grafico copertina: Flavio Miglietta

Prima pagina di copertina: il logo ENEA, deformato tramite anamorfosi catottrica sul piano, è praticamente irriconoscibile. Tuttavia, osservando con un solo occhio il suo riflesso sopra il vertice dello specchio conico, appare come se fosse disegnato nelle forme corrette alla base dello stesso specchio.

Quarta pagina di copertina: dado deformato da anamorfosi prospettica. Per vedere il dado nelle giuste proporzioni è sufficiente osservare l'anamorfosi con un solo occhio dal basso della copertina, in posizione radente, da una distanza di circa 35 cm.

INDICE

1. Introduzione	5
2. Anamorfosi, cenni storici e origine del nome	5
3. Costruire un'anamorfosi prospettica: le tecniche di Leonardo, Lomazzo e Nicéron	10
4. Calcolo analitico del punto di osservazione delle anamorfosi prospettiche	12
5. Anamorfosi catottriche, a scomposizione del soggetto e tridimensionali	16
5.1 Anamorfosi catottriche cilindriche	17
5.2 Anamorfosi catottriche coniche	18
5.3 Anamorfosi tridimensionali e loro percezione	21
5.4 Anamorfosi a scomposizione del soggetto	22
6. A cosa servono le anamorfosi?	23
6.1 Crittografia anamorfica	23
6.2 Elaborazione anamorfica di immagini per antiterrorismo	24
6.3 Paesaggi anamorfici	25
6.4 Arte di strada	26
6.5 Cartelloni pubblicitari	27
6.6 Didattica	28
7. Riassunto e commenti conclusivi	30
Appendici matematiche	33
A1 Relazione analitica tra i punti di un disegno e i punti del corrispondente disegno anamorfico prospettico. Calcolo della distorsione	33
A2 Calcolo analitico del punto di osservazione delle anamorfosi prospettiche nel caso generale di un disegno a simmetria rettangolare	36
A3 Relazione analitica tra i punti di un disegno e i punti della corrispondente anamorfosi catottrica conica	38
Referenze e note	41
Crediti immagini	43

Affiliazione degli autori:

PAOLO DI LAZZARO, DANIELE MURRA

*ENEA, Divisione Fisica della Fusione, Laboratorio Sorgenti, Antenne e Diagnostica,
Centro Ricerche ENEA di Frascati*

PIETRO VITELLI

Cusano Mutri (Benevento)

Le immagini anamorfiche in un viaggio interdisciplinare tra arte, storia, geometria e attualità**Riassunto**

L'anamorfosi è la tecnica di disegnare un'immagine deforme, incomprensibile se vista frontalmente, che appare ben proporzionata da un punto di vista eccentrico, oppure osservando il suo riflesso da un opportuno specchio curvo. In questo saggio proponiamo un affascinante viaggio fra immagini virtuali, metafore visive e inganni prospettici, riassumendo l'origine, i protagonisti e le tecniche per costruire diversi tipi di anamorfosi. Incontreremo quesiti di psicologia della percezione, di geometria, di storia dell'arte, di prospettiva e di fisiologia della visione. Gli appassionati di matematica potranno soffermarsi sui calcoli analitici della mappatura dei disegni anamorfici prospettici e catottrici conici e della posizione del punto di osservazione delle anamorfosi prospettiche. Infine, presenteremo alcune tecniche anamorfiche applicate alla crittografia, all'antiterrorismo, alla pubblicità, alla paesaggistica, all'arte di strada e alla didattica.

Questo saggio presenta un approccio multidisciplinare al tema dell'anamorfismo, evidenziando una sorprendente interazione tra argomenti apparentemente distanti, come la geometria e la psicologia, l'ottica e la prospettiva, l'arte di strada e la fisiologia della visione.

Lo studio interdisciplinare delle anamorfosi, oltre ad essere facilmente adattabile a scopi didattici e divulgativi, può rappresentare un ponte tra le culture umanistica e scientifica, in un raro esempio di Cultura Totale.

Parole chiave: Anamorfosi; Arte di strada; Cambiamento di coordinate; Crittografia; Didattica; Geometria; Gestalt; Illusioni ottiche; Immagini virtuali; Leonardo; Lomazzo; Maignan; Mapping; Nicéron; Prospettiva; Psicologia della percezione; Pubblicità; Tridimensionalità; Visione.

1. Introduzione

La prospettiva nelle arti figurative si basa su calcoli geometrici per disegnare figure su una superficie piana, in due dimensioni, che riproducono fedelmente una scena tridimensionale [1, 2].

Un disegno realizzato in prospettiva richiede un ‘punto di fuga’ dato dall’intersezione del prolungamento delle linee, parallele nel paesaggio reale ma convergenti nel disegno, che nella scena raffigurata appaiono allontanarsi dall’osservatore. Il punto di fuga giace sul piano del disegno e di solito si trova all’interno del riquadro dipinto. Il primo esempio storico in cui è possibile verificare la presenza di un punto di fuga è nel quadro “*L’annunciazione*” di Ambrogio Lorenzetti, del 1344, ma il compendio della tecnica prospettica (incluse le regole della ‘costruzione legittima’ cioè della proiezione centrale con punto di distanza) sarà elaborato un secolo più tardi con il “*De Pictura*” (1435-1436, stampato nel 1511) di Leon Battista Alberti [3]. Egli si basò sulle geniali intuizioni dell’architetto Filippo Brunelleschi, noto per aver realizzato due tavole raffiguranti piazza della Signoria e il Battistero di Firenze con una rispondenza grafica assai accurata [2]. Grazie alla *costruzione legittima* l’osservatore in posizione frontale davanti al dipinto percepisce una rappresentazione coerente con l’osservazione tridimensionale della realtà, nella profondità virtuale della scena rappresentata.

Contemporaneamente all’avvento della prospettiva centrale, si sviluppò un’altra tecnica in cui il soggetto appariva realistico solo se osservato da un punto di vista eccentrico, laterale rispetto alla figura. I primi esempi risalgono a Piero della Francesca –di cui parleremo nel prossimo paragrafo– e a Leonardo da Vinci, cui sono attribuiti i disegni allungati di un occhio e di un volto infantile nel Codice Atlantico [4, 5]. Questi disegni non seguono le regole della prospettiva centrale bensì quelle della ‘*prospettiva accidentale*’, come la definisce lo stesso Leonardo, e in seguito sarebbero stati chiamati ‘anamorfici’ dal greco αναμόρφωσις, un neologismo del XVII secolo traducibile come ‘dare una nuova forma a una figura’ [6] oppure ‘realizzare una forma al contrario’ [7].

Nelle anamorfosi prospettiche il disegno è intenzionalmente deformato e a prima vista il soggetto è confuso, indecifrabile. Lo stesso disegno, se osservato di scorcio, a una determinata distanza dal piano del disegno, si rivela nelle corrette proporzioni e sembra magicamente ‘emergere’ dal piano in cui è stato realizzato, assumendo caratteristiche tridimensionali.

Accanto alle anamorfosi prospettiche, ve ne sono altre, dette ‘catottriche’ (dal greco κάτοπτρον che significa specchio) che fanno uso di specchi curvi per rettificare la deformazione anamorfica.

Un terzo tipo di anamorfosi si basa sulla scomposizione dell’immagine originale in porzioni che sono disposte su superfici sfalsate.

In questo saggio riassumiamo l’origine, i protagonisti e le tecniche per costruire diversi tipi di anamorfosi e discutiamo le loro applicazioni in campo artistico, nella crittografia, nelle tecniche di imaging, nella cartellonistica pubblicitaria e negli studi di psicologia della percezione visiva.

Le anamorfosi offrono sorprendenti connessioni tra l’arte di strada e la matematica, la psicologia e la prospettiva, le arti figurative e la fisiologia della visione, rendendo il tema adatto a un approccio interdisciplinare.

2. Anamorfosi, cenni storici e origine del nome

Le prime immagini anamorfiche furono create nel Quattrocento da Piero della Francesca e da Leonardo [4, 8]. Di Leonardo rimangono solo i due disegni nel Codice Atlantico già menzionati –peraltro di dubbia attribuzione, vedi i commenti alla referenza [4]– mentre del pittore di San Sepolcro c’è un dettaglio anamorfico nella *Pala Montefeltro* (detta *Pala di Brera*, 1474 circa), vedi la Figura 1.

All’interno del dipinto, eseguito in prospettiva centrale, l’uovo che pende dal soffitto si trasforma in una sfera se visto in posizione eccentrica, dal basso del quadro. Piero della Francesca, infatti, nel “*De prospectiva pingendi*” scrive [9]:

E quando ti accadesse di voler disegnare sopra una tavola degli oggetti che appaiano elevati, come casse, dischi, palle, animali, vasi o candelieri o sotto ad un solaio anelli o altre cose che pendano, che da un certo punto appaiano come veri. Ti dico che se vuoi porre sopra un piano un lineamento che da un certo punto appaia come un corpo sferico, ovvero una palla, segui questo metodo: (...)

E il trattato continua con la descrizione della tecnica che consente di realizzare un'anamorfose prospettica.

Nel Cinquecento diversi artisti europei realizzano disegni anamorfici. L'esempio più noto è *Gli Ambasciatori*, dipinto nel 1533 da Hans Holbein il giovane, oggi esposto presso la National Gallery di Londra. Ai piedi dei due personaggi principali che danno il titolo all'opera, vi è uno strano oggetto bianco e oblungo, vedi la Figura 2. Osservando il dipinto da destra vicino alla parete, i personaggi e gli oggetti allegorici scompaiono e l'unico elemento riconoscibile è il disco oblungo che dall'osservazione radente si rettifica in un teschio, allusione alla *omnia vanitas* e all'effimera condizione umana.

In questo dipinto la lettura della *vanitas* è esaltata dall'anamorfose del teschio. Infatti, il quadro è concepito per essere posizionato sulla parete opposta alla porta di ingresso e accanto alla porta di uscita della sala. L'osservatore, entrando, coglie la giovinezza, la ricchezza e l'erudizione dei due personaggi testimoniata dagli strumenti scientifici e musicali, mentre il teschio –simbolo della caducità delle vanità umane– è presente, ma non è riconoscibile. La lettura cambia drasticamente quando l'osservatore, prima di uscire dalla porta a destra del quadro, voltandosi, getta un ultimo sguardo radente al dipinto, vedi la Figura 2 a destra. Dal punto di vista radente, le figure mondane scompaiono e rimane solo il teschio, ora ben riconoscibile, in una sorta di *memento mori*.

Figura 2. A sinistra, *Gli Ambasciatori*, di Holbein il giovane (1533). Olio su tavola, 206 cm x 209 cm. A destra, il dipinto visto da posizione radente (elaborazione software Blender). L'oggetto oblungo ai piedi dei personaggi è rettificato in un teschio, simbolo della caducità delle vanità umane, mentre tutti gli altri elementi scompaiono alla vista.



Figura 1. La *Pala Montefeltro* di Piero della Francesca, esposta presso la Pinacoteca di Brera, Milano. L'uovo in alto diventa una sfera osservando la Pala da un punto di vista radente e dal basso.



Nello stesso periodo sono pubblicati diversi trattati sulla prospettiva, che in alcuni casi contengono dettagli su come realizzare disegni anamorfici. Citiamo “*Le due Regole della Prospettiva Pratica*” (1540 circa) di Jacopo Barozzi da Vignola [10] in cui vi è un paragrafo intitolato ‘Di quelle pitture che non si possono vedere che cosa siano, se non si mira per il profilo della tavola dove sono dipinte’, “*La Pratica delle prospettiva*” (1568) di Daniele Barbaro [11] in cui ‘si espone una bella e secreta parte di prospettiva’ e si parla di pitture ‘nelle quali se non è posto l’occhio di chi le mira nel punto determinato ci appare ogni altra cosa che quella che è dipinta, che poi, dal suo punto veduta, dimostra quello che è veramente fatto secondo la intenzione del pittore’, il “*Trattato dell’arte della pittura*” (1585) di Giovanni Paolo Lomazzo [12] in cui si menzionano le ‘bizzarre inventioni de’ Germani’, alludendo alle xilografie anamorfiche chiamate Vexierbild (quadro con segreto) di Erhard Schön, datate tra 1535 e il 1538, dall’eloquente titolo “*Was siehst du?*” (Che cosa vedi?), “*La Perspective avec la Raison des Ombre set Miroirs*” (1612) di Salomon de Caus [13] e altri che seguiranno.

Descrivendo un metodo per disegnare le anamorfosi, Lomazzo [12] scrive che questa tecnica era già stata usata da Gaudenzio Ferrari –uno dei massimi esponenti dell’arte italiana del Cinquecento, le cui opere sono d’impronta leonardesca– per disegnare il profilo anamorfico di Gesù che lo stesso Lomazzo aveva visto, e due dipinti anamorfici di Leonardo –uno di un leone che lotta contro un drago ‘cosa molto mirabile a vedere’ e l’altro di cavalli, destinato a Francesco I, Re di Francia– che gli erano stati descritti da Francesco Melzi, allievo ed erede di Leonardo. La testimonianza di Lomazzo è importante perché conferma l’attività di Leonardo sulla ‘prospettiva accidentale’ che potrebbe essere messa in dubbio dall’assenza di opere anamorfiche attribuibili con certezza a Leonardo sopravvissute ai nostri giorni, vedi i commenti alla referenza [4].

I trattati del Cinquecento e del primo Seicento [10 - 15] descrivono l’anamorfosi come una curiosità, un’appendice matematica della prospettiva. Finché nel 1638 il giovane frate dei Minimi Jean François Nicéron scrive un trattato quasi interamente dedicato alle anamorfosi, chiamate dall’autore *perspective curieuse* [16]. Nel trattato, diviso in quattro volumi, Nicéron dedica cinquanta pagine del primo volume alle leggi della prospettiva, mentre il secondo e terzo volume sono interamente dedicati alle anamorfosi prospettiche, catottriche e a scomposizione del soggetto. Il quarto volume affronta la diottrica e la rifrazione ottica. È interessante leggere il titolo completo dell’opera di Nicéron, che spiega cosa sia l’anamorfosi: ‘*Prospettiva curiosa o magia artificiale degli effetti meravigliosi dell’ottica della catottrica e della diottrica. Nella quale, oltre a un compendio dei metodi generali della prospettiva comune, esemplificata sui cinque solidi regolari, si insegna come costruire ogni specie di figure deformi, che, viste da un punto adatto, appaiono ben proporzionate. Tutto questo con procedimenti così semplici che anche i meno esperti in Geometria potranno servirsene aiutandosi solo con riga e compasso. Opera utilissima a Pittori, Architetti, Incisori, Scultori, e a tutti coloro che si servono di disegni nel loro lavoro*’.

Una successiva edizione, scritta in latino e intitolata “*Thaumaturgus opticus*” [17], edita dal frate dei Minimi Marin Mersenne¹, è pubblicata postuma, pochi mesi dopo la prematura morte di Nicéron nel 1646, a soli 33 anni.

Grazie alla completezza, approccio didattico e dovizia di particolari, i trattati di Nicéron diventano i testi di riferimento per gli artisti interessati alle anamorfosi, benché la parola ‘anamorfosi’ ancora non fosse stata coniata. Questo termine compare per la prima volta nel trattato “*Ars magna lucis et umbrae*” [6], scritto dal gesuita Athanasius Kircher e pubblicato a Roma nel 1646, l’anno della morte di Nicéron.

Infatti, nel capitolo ‘Ars Sciagraphica’ (l’arte di disegnare oggetti con le relative ombre) Kircher presenta varie tecniche prospettiche e alle pagine 183-184 mostra come costruire un’anamorfosi. In particolare, alla Propositio IX, Kircher scrive:

¹ Padre Mersenne (teologo, filosofo e matematico) ebbe un ruolo importante nella circolazione di idee e scoperte tra filosofi e scienziati, in un’epoca in cui ancora non esistevano giornali scientifici. Realizzò un cenacolo intellettuale, l’Academia Parisiensis, centro di una rete di scambio di informazioni epistolare, che influenzò gli studi di matematica e la produzione artistica dell’epoca. Fra gli illustri corrispondenti di Mersenne, oltre a Nicéron, menzioniamo Tommaso Campanella, René Descartes, Pierre de Fermat, Christian Huygens, Blaise Pascal, Evangelista Torricelli.

Deinde, per reliquarum linearum ultima puncta ex K, lineae in infinitum productae dabunt spacium, intra quas lineas anamorphosis, sive transformatio figurae facienda est.

che può essere tradotto ‘Quindi, per gli ultimi punti delle linee rimanenti, le linee prolungate da K all’infinito produrranno uno spazio entro le cui linee sarà realizzata l’anamorfosi, cioè la trasformazione della figura.’

Undici anni dopo, Kaspar Schott, un discepolo di Kircher, scrive il libro “*Magia universalis naturae et artis*” [18] dove un capitolo è intitolato ‘De magia anamorphotica, sive de arcana imaginum deformatione ac reformatione ex Optices atque Catoptrices praescripto’².

Oltre ad illustrare i metodi per disegnare anamorfosi prospettiche e catottriche, Niceron ne realizza diverse, delle quali almeno una è sopravvissuta ai giorni nostri³. Lungo uno dei corridoi del convento della Trinità dei Monti, a Roma, tra la metà del 1639 e l’inizio del 1640 Niceron dipinge l’imponente anamorfosi policroma “*San Giovanni Evangelista che scrive l’Apocalisse nell’isola di Patmos*”⁴ e un paio di anni dopo Emmanuel Maignan, padre superiore tra i Minimi, matematico ed esperto di gnomonica, dipinge in grisaglia⁵ un’altra anamorfosi murale lunga circa 20 metri nel corridoio adiacente, “*San Francesco di Paola in preghiera*” dedicata al fondatore dell’ordine dei Minimi [7, 21-23].

L’opera di Maignan dopo i restauri del 1998 è in buono stato di conservazione (vedi le Figure 3 e 4), mentre il dipinto di Niceron è stato coperto da plurime intonacature durante le complesse vicende storiche del convento e solo nel 2009 il lavoro di restauro l’ha riportato parzialmente alla luce [21].



Figura 3. L’anamorfosi di S. Francesco di Paola dipinta da Maignan nel convento della Trinità dei Monti a Roma. A sinistra il disegno è visto dal punto prospettico, a destra è visto dal lato opposto, dove appare evidente la deformazione anamorfica del soggetto. Foto degli autori.

² Jurgis Baltrusaitis, uno dei maggiori storici dell’arte anamorfica, attribuisce a Schott l’invenzione della parola ‘anamorfosi’ [19], in riferimento al libro [18] che tuttavia è posteriore al trattato di Kircher [6]. Di conseguenza, d’accordo con Arnaudo [20], è corretto attribuire a Kircher il neologismo ‘anamorfosi’.

³ Oltre all’anamorfosi prospettica di S. Giovanni descritta nel testo, alcune anamorfosi catottriche sono riferite a Niceron, vedi ad esempio la figura 12, ma la loro attribuzione non è certa, ad eccezione del ritratto anamorfico catottrico cilindrico di Jacques d’Auzoles de Lapeyre, realizzato da Niceron nel 1631 [19].

⁴ Nel disegno anamorfico S. Giovanni sta scrivendo un libro, sul quale Niceron riporta la frase, in greco, ‘l’apocalissi di questa ottica, il testimone dell’apocalissi’ dove per apocalissi si intende la rivelazione.

⁵ Il termine deriva dal francese *grisaille* e, riferito ad un disegno, significa ‘in tonalità di grigio’.



Figura 4. Dettaglio dell'anamorfosi di S. Francesco di Paola come appare dal punto di osservazione centrale. Si intravedono piccole case, colline dalla forma bizzarra sullo sfondo, e barche che navigano nel mare. Nel cielo forme morbide, forse sono nuvole al tramonto. Si riconoscono ciuffi di erba e un ramo di ulivo in primo piano. Tutti i dettagli (barche, case, erba) forzano la lettura del paesaggio in un insieme di linee curve che altrimenti non avrebbe significato [23]. Lo scopo è di ingannare l'osservatore. Infatti, come si vede nella Figura 3 a sinistra, dal punto di vista prospettico i piccoli dettagli spariscono alla vista, sovrastati dalla grande figura del santo. Foto degli autori.

Non sono molte le anamorfosi sopravvissute ai nostri giorni, tra le quali, a giudizio degli autori, gli esempi più affascinanti sono il soffitto e la falsa cupola della chiesa di S. Ignazio di Loyola a Campo Marzio, Roma, con gli affreschi di Andrea Pozzo⁶. Di Andrea Pozzo val bene ricordare anche gli affreschi anamorfici nel corridoio delle stanze di S. Ignazio, presso la Chiesa del Gesù a Roma, nel refettorio del già citato convento della Trinità dei Monti ed altri disegni di false cupole eseguiti a Frascati, ad Arezzo e a Vienna. Viceversa, possiamo ammirare numerose rappresentazioni di architetture tridimensionali illusorie in prospettiva centrale, tra cui ricordiamo il presbiterio della chiesa di S. Maria presso San Satiro a Milano, di Donato Bramante⁷, le scene prospettiche del Teatro Olimpico palladiano a Vicenza, di Vincenzo Scamozzi⁸, e il corridoio di Palazzo Spada a Roma, di Francesco Borromini⁹.

Vi sono anche numerosi esempi di dipinti illusionistici atti a creare un'illusione prospettica di tridimensionalità tra i quali ricordiamo il delizioso oculo sul soffitto della *'Camera degli sposi'* di Andrea Mantegna¹⁰.

A partire dal Settecento, l'anamorfosi cade gradualmente in oblio e la pittura illusionistica persiste nella forma *'tromp-l'oeil'* la quale, analogamente alle rappresentazioni illusionistiche menzionate, è eseguita in prospettiva centrale. Tuttavia, da qualche decina di anni l'anamorfosi ha conosciuto una seconda giovinezza grazie all'arte *'di strada'*, disegni realizzati su vie, marciapiedi e pareti di edifici. Nonostante siano passati secoli, la tecnica per costruire le anamorfosi prospettiche non è cambiata di molto e l'effetto illusorio continua a meravigliare e sconcertare.

⁶ <https://www.theartpostblog.com/chiesa-sant-ignazio/>

⁷ <http://arengario.net/momenti/momenti34.html>

⁸ <https://www.palladiomuseum.org/scamozzi/opera/5>

⁹ <https://restaurars.altervista.org/la-galleria-prospettica-borromini-galleria-spada/>

¹⁰ <http://www.cameradeglisposi.it/storia.asp>

3. Costruire un'anamorfosi prospettica: le tecniche di Leonardo, Lomazzo e Nicéron

Albrecht Dürer aveva perfezionato il consiglio di Alberti di interporre un velo inserito in una cornice con una griglia di fili tra il disegnatore e il soggetto e di preparare un'analogha griglia sulla tela finale [24], come mostrato nella Figura 5.

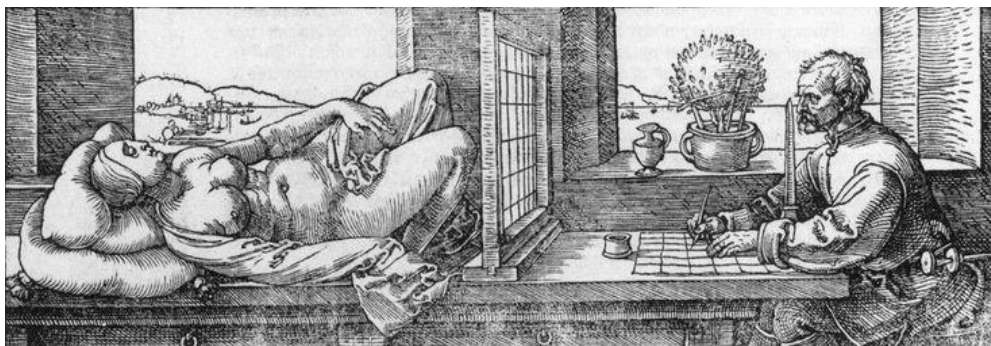


Figura 5. Metodo di Alberti-Dürer per facilitare il disegno del soggetto da ritrarre. Tratto da [24].

Per raffigurare il soggetto nelle dovute proporzioni, è necessario disegnare il tratto dei singoli quadretti della griglia in modo da combaciare ai lati. È una tecnica ancora attuale, che facilita il compito del pittore. Nel disegno in prospettiva centrale la tela è posta tra il pittore e il soggetto da raffigurare: i raggi che vanno dal soggetto all'occhio del pittore incontrano la tela, vedi la Figura 5. Nel caso dell'anamorfosi, invece, i raggi sono proiettati dall'occhio verso il soggetto e da questo idealmente prolungati fino a incontrare la superficie su cui sarà eseguito il disegno. In altre parole, il soggetto da disegnare è interposto tra il pittore e la 'tela', quindi occorre invertire il concetto di rappresentazione, in una sorta di '*prospettiva inversa*' cui Lomazzo aveva dedicato il titolo di uno dei capitoli del trattato [12]: "Modo di fare la prospettiva inversa che paia vera, essendo veduta per un solo forame". Il principale motivo del 'solo forame' è per apprezzare al meglio l'anamorfosi, osservandola con un solo occhio in modo da perdere la sensazione di profondità creata dalla visione binoculare, come illustrato nel prossimo §4.

Leonardo [8] suggerisce di usare la luce di una torcia, fatta passare attraverso un foro, che illumina il soggetto da riprodurre. L'ombra del soggetto è proiettata sul pavimento e su una parete verticale, laddove andrà segnato il perimetro dell'ombra, all'interno della quale si disegna il soggetto. Il foro sarà il punto di vista dell'osservatore e la disposizione diventa: pittore, soggetto, disegno. Leonardo definisce questa tecnica '*prospettiva accidentale*' che è opposta alla '*prospettiva naturale*' perché gli oggetti distanti sono disegnati più grandi degli oggetti vicini, al contrario di quanto osserviamo nella realtà. Ciò avviene perché la parete su cui si disegnano le ombre '*ha distanza ineguale dall'occhio in ogni parte della sua lunghezza*' [25]. Da qui nasce la deformazione che rende il disegno anamorfico indecifrabile se osservato frontalmente.

Osservando il disegno dal foro da cui partivano i raggi luminosi, si ha l'impressione di vedere il soggetto dove era posto nel momento in cui era stato investito dalla luce, tra l'osservatore e la parete. Per questo motivo le figure anamorfiche sembrano sollevarsi dalla parete e, per dirla con Leonardo, '*non ti potrà mai persuadere che detta figura non sia dispiccata dal muro*' [8]. Tuttavia, '*rimovendosi alquanto l'occhio d'essa prespectiva risguardatore, ogni cosa figurata apparisce monstuosa*' [25]. L'effetto illusorio di tridimensionalità è descritto in dettaglio nel prossimo §4.

Barbaro [11] propone un procedimento simile al metodo di Leonardo, disegnando due teste umane su un cartone: il contorno delle teste è traforato '*come se ne volessi fare uno spolvero, ma con punti alquanto grossi*'. Il cartone è collocato ortogonalmente su un tavolo e illuminato dalla luce che passa attraverso un'apertura. Unendo i punti di luce proiettati sul tavolo, l'immagine appare '*senza regola e forma alcuna, ma se starai al punto dal quale sono venuti i raggi del sole, le teste ti pareranno formate, come sono sopra la carta*'. Barbaro suggerisce di aggiungere al dipinto anamorfico '*paesi, acque, monti, sassi et altre cose diverse da quelle che sono dipinte*' in modo da mascherare il soggetto anamorfico e ingannare l'osservatore, come già fatto da Schön alcuni decenni prima nelle sue Vexierbild [19].

Lomazzo [12] propone una variante che non prevede l'uso di una sorgente luminosa, in modo da realizzare anamorfosi di grandi dimensioni, per le quali la luce di una lanterna o del sole non erano intense a sufficienza. L'immagine originale è disegnata entro un reticolo e incernierata su una parete lungo un lato verticale, in modo che possa essere vista ortogonalmente da un osservatore posto accanto alla parete, come mostrato nella Figura 6. Il soggetto del quadro visto dall'osservatore deve essere riportato sulla parete dietro il quadro e Lomazzo suggerisce di usare il metodo di Dürer (Figura 5), proiettando la griglia dal punto di osservazione fino alla parete stessa tramite lunghi fili che simulano e materializzano i raggi di luce che raggiungono l'occhio dell'osservatore.

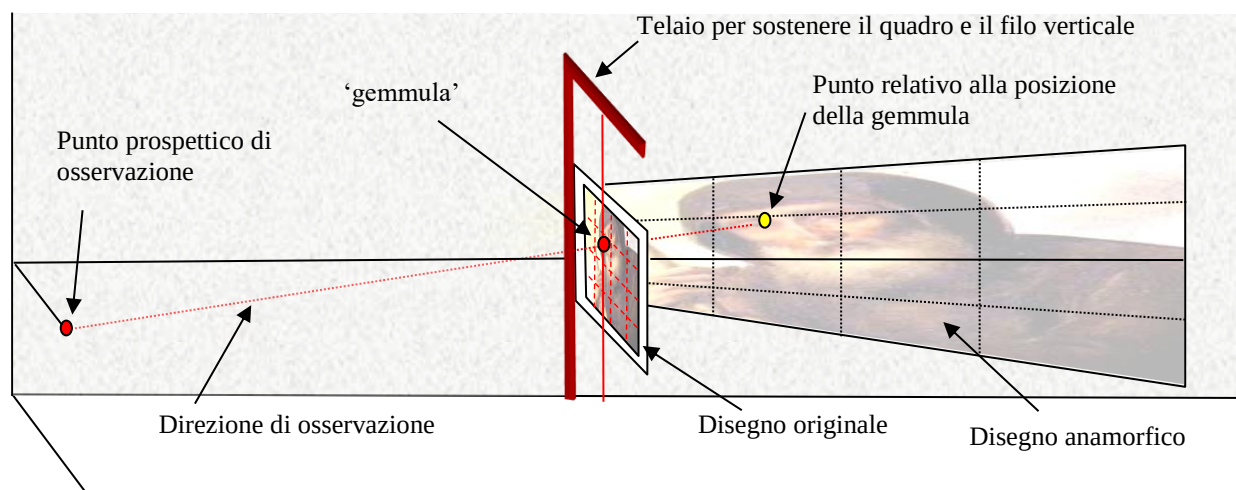


Figura 6. Metodo per realizzare un'anamorfosi prospettica di grandi dimensioni, descritto da Lomazzo e perfezionato da Maignan. Il ritratto, disegnato entro un reticolo, è incernierato alla parete e ruotato fino a porsi perpendicolare all'osservatore. Lungo un filo a piombo appeso alla trave perpendicolare alla parete, è fatto scorrere un anello che può essere bloccato all'altezza desiderata corrispondente a ciascun punto saliente del ritratto. Dal punto di osservazione si tira un filo che passa per l'anello fino ad arrivare sulla parete, dove è riportato il punto corrispondente. Unendo i vari punti così ottenuti sulla parete, si delinea l'anamorfosi del ritratto. Tolto il quadro, l'osservazione del disegno anamorfico sulla parete dal punto da cui sono stati tirati i fili rende l'illusione di osservare il disegno originale come se fosse sul piano (virtuale) del quadro rimosso. Disegno degli autori.

Maignan [26] utilizza una variante ingegnosa, ponendo sopra al quadro una trave da cui pende un filo su cui può scorrere una piccola sfera (Maignan la chiama *gemmula*) come mostrato nella Figura 6. Una volta riportati tutti i punti di riferimento sulla parete, è sufficiente unirli per ottenere il ritratto deformato in modo anamorfico.

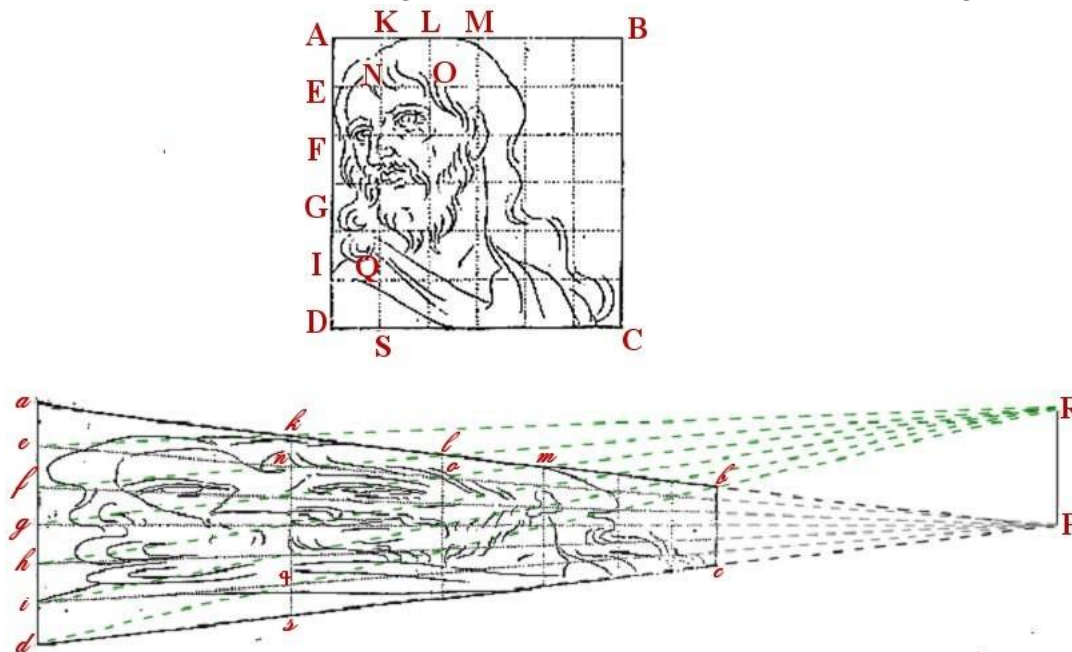
Rimosso il quadro, l'osservatore che guarda il disegno anamorfico dal punto da cui sono stati tirati i fili percepisce il disegno originale che "emerge" dalla parete, come se il quadro fosse ancora incernierato alla parete stessa. Questo accade perché al contrario della prospettiva classica, dove il quadro è come una 'finestra' attraverso la quale si vede il soggetto, nelle anamorfosi la finestra è ricostruita mentalmente, in un processo percettivo che sarà descritto in dettaglio nel §4, commentando la Figura 10.

A differenza dei metodi empirici di Leonardo e Lomazzo, Nicéron propone un metodo progettuale, usando solo carta e matita, aiutandosi con riga e compasso [16, 17].

La Figura 7 mostra il volto di un uomo barbuto in una cornice quadrata, divisa in una griglia di $6 \times 6 = 36$ quadratini. Costruiamo un triangolo isoscele 'Pad' la cui base 'ad' ha la stessa lunghezza del lato 'AD' del disegno, ed è anch'essa divisa in 6 segmenti uguali. Da ciascuno dei punti *e, f, g, h, i* che delimitano i segmenti tracciamo una linea che congiunge il vertice P del triangolo, come mostrato nella Figura 7.

Ora tracciamo un segmento 'PR' parallelo a 'ad' e una linea da R al punto *d*. L'intersezione del segmento 'Rd' con il triangolo fornisce il punto *b* corrispondente al punto B del quadrato ABCD. Tracciando da *b* una linea parallela a 'ad', l'intersezione con l'altro lato del triangolo fornisce il punto *c* corrispondente al punto C del quadrato, quindi il segmento 'bc' corrisponde al lato BC. Analogamente, le intersezioni dei segmenti 'Re', 'Rf', 'Rg', 'Rh', 'Ri' con il triangolo fornisce rispettivamente i punti *k, l, m*, dai quali possiamo tracciare

Abbiamo quindi ottenuto il trapezio isoscele $abcd$ diviso in 36 piccoli trapezoidi, ciascuno dei quali corrisponde a un quadratino della griglia in cui è diviso $ABCD$. Disegnando il tratto di disegno all'interno di ciascun trapezoide in modo che inizi e finisca nel punto analogo del corrispondente quadratino del volto in $ABCD$, otteniamo il volto distorto visibile nella Figura 7 in basso, che è l'anamorfosi del volto originale.



Quest'ultimo metodo sarà riproposto da Kircher [6] il quale inventerà anche il 'quadro mesoptico', un marchingegno che consente di utilizzare la tecnica di Maignan. I tre metodi di Nicéron, Maignan e Kircher saranno condensati da Schott nella sua trattazione delle anamorfosi [18].

4. Calcolo analitico del punto di osservazione delle anamorfosi prospettiche

Nella Figura 7, P è il punto di fuga dell'anamorfosi, posto all'esterno del disegno. Nicéron scrive che il punto prospettico dal quale il disegno anamorfico appare nelle corrette proporzioni si trova sopra il punto P, a un'altezza uguale alla lunghezza del segmento PR. I disegni della Figura 7 si trovano nel *Liber Secundus* [17], Proposizione III che si intitola (nostra traduzione): 'Definizione del metodo per proiettare su un piano obliquo un'immagine che non rappresenta nulla se vista dal punto di vista normale al disegno, e rivela un'immagine perfettamente riconoscibile se osservata da un punto di vista in posizione eccentrica'.

All'inizio, leggiamo:

Habet haec propositio fundamentum in octava prioris libri, ubi de pavimentorum quadratorum contractione egimus; solum enim differre videtur in collocandis punctis primario et distantiae, apposite ad eum quem intendimus effectum producendum.

che può essere tradotto *Questa proposizione si basa sull'ottava (proposizione) del primo libro, riguardo alla contrazione (cioè alla riduzione prospettica) dei pavimenti a scacchi; si può vedere che esso differisce solo per la posizione del punto primario e per la distanza del punto che determina l'effetto che vogliamo ottenere.*

Infatti, nel secondo libro Niceron mostra la costruzione anamorfica descritta nella Figura 7, senza alcuna dimostrazione.

Il *Liber Primus* [17] descrive una tecnica per disegnare un oggetto su una superficie verticale, in modo che un osservatore abbia l'impressione di vedere lo stesso oggetto sul piano orizzontale. Si tratta della 'prospettiva centrale', usata per disegnare scene teatrali su pannelli verticali, in modo da dare l'illusione di una maggiore profondità.

Nella Figura 8 il piano orizzontale è rappresentato dalle lettere ABCD mentre il piano verticale, detto 'scenico', da IKLM. Il disegno sul pavimento è il quadrilatero EOQX, e la sua rappresentazione verticale è NRQO. Niceron mostra che il punto R (dato dall'intersezione della linea di vista GX con IKLM) è ottenuto congiungendo Q con P, dove P è la proiezione del punto G sul pavimento scenico IKLM sulla perpendicolare al punto O.

Dalla Figura 8 si deduce che la visione prospettica di XQ è data da RQ, il cui prolungamento incrocia l'estensione di NO (vista prospettica di EO) in P, che quindi rappresenta il punto di fuga.

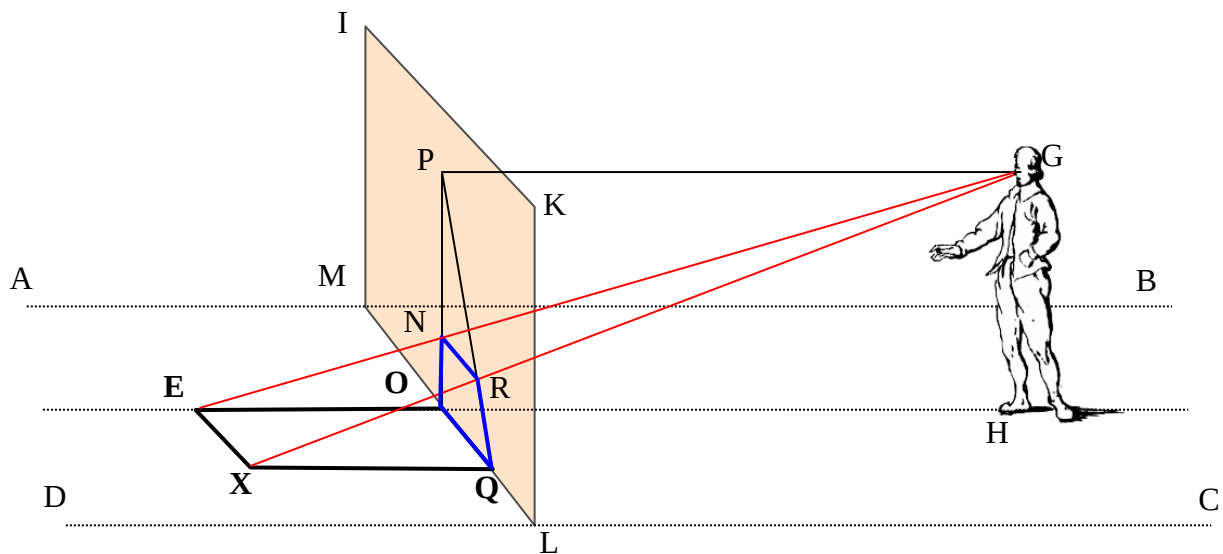


Figura 8. Schema della costruzione prospettica sul piano verticale di una forma disegnata sul pavimento. Immagine tratta dal *Liber Primus* [17], edita dagli autori.

Niceron presenta un altro disegno, utile a tracciare il trapezoide NRQO che rappresenta la proiezione verticale del quadrilatero EOQX posto sul piano orizzontale nella Figura 8. Questo disegno può essere ricavato dal precedente ruotando sia il punto di osservazione G attorno all'asse verticale OP, sia il quadrilatero EOQX attorno all'asse orizzontale ML, come mostrato nella Figura 9. Questa soluzione permette di realizzare il disegno prospettico direttamente su una superficie piana, come nelle moderne proiezioni ortogonali.

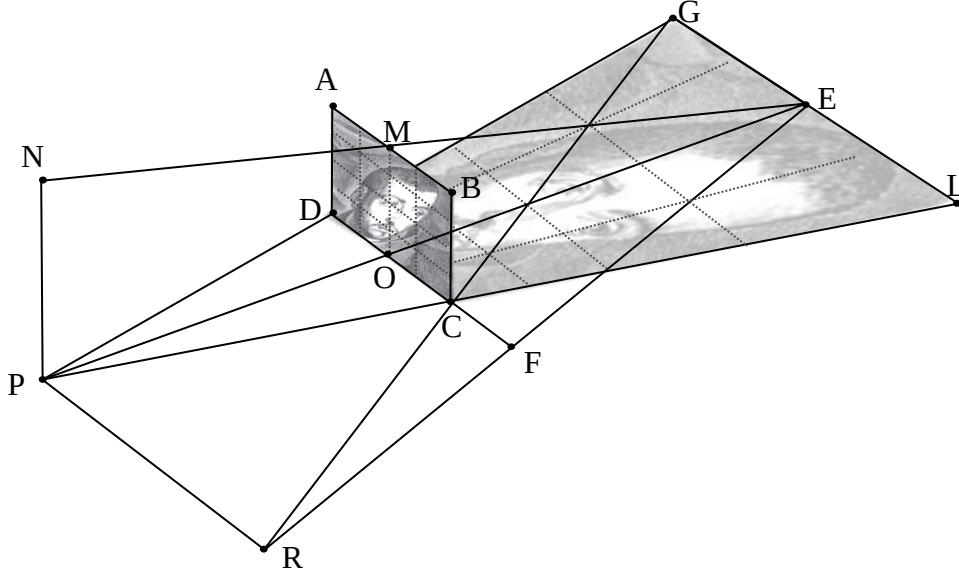


Figura 10. Vista tridimensionale dell'anamorfosi del ritratto di Nicéron. Il disegno anamorfico è delimitato dal trapezoide DGLC, e appare nelle corrette proporzioni solo se osservato dal punto prospettico N, come se fosse disegnato su un piano virtuale ABCD perpendicolare al disegno anamorfico. Disegno degli autori, tratto da [30].

La Figura 10 mostra la costruzione dell'anamorfosi del ritratto di Nicéron. Il ritratto originale è iscritto nel quadrato ABCD, perpendicolare alla sua anamorfosi che si trova nel trapezoide DGLC. Notiamo che il punto N nella Figura 10 coincide con la posizione del foro che agisce sia come sorgente di luce sia come punto di osservazione, proposto da Leonardo [8] per ottenere forme anamorfiche: infatti, l'oggetto da disegnare è in ABCD e la sua ombra anamorfica è proiettata su DGLC. Dopo aver disegnato i contorni dell'ombra sulla parete, l'osservazione da N permette di percepire la forma originale dell'oggetto.

Vogliamo dimostrare che il segmento PR, usato per costruire l'anamorfosi della Figura 10 con la stessa procedura usata nella Figura 7, è uguale al segmento PN, dove N è il punto prospettico dal quale il disegno anamorfico in DGLC appare identico al disegno originale in ABCD.

Nella Figura 10 abbiamo le seguenti relazioni geometriche: $PD = PC$; $PG = PL$; $DO = OC$; $PO \perp DC$; $PE \perp GL$; $PR \parallel DF \parallel GL$. Consideriamo i triangoli EFO e ERP. Essi sono simili perché hanno in comune l'angolo in E, hanno entrambi un angolo retto, e hanno le loro basi PR e OF parallele. Ne segue che

$PR / OF = RE / FE$. Cioè,

$$PR = OF \times RE / FE . \quad (1)$$

Consideriamo ora i triangoli GCD e GRP. Anch'essi sono triangoli simili, perché hanno tre angoli congruenti: infatti, l'angolo G è in comune, i lati CD e PR sono paralleli e gli angoli corrispondenti uguali. Possiamo quindi scrivere: $PR / DC = RG / CG$, cioè,

$$PR = DC \times RG / CG . \quad (2)$$

Confrontando le equazioni (1) e (2) otteniamo

$$OF \times RE / FE = DC \times RG / CG . \quad (3)$$

Essendo PR, DF and GL paralleli l'un l'altro, il teorema di Talete [31] ci dice che i segmenti tra queste linee sono proporzionali, sicché $RE / RG = FE / CG$, e quindi

$$RE / FE = RG / CG . \quad (4)$$

Combinando le equazioni (3) e (4) otteniamo $OF = DC$. Notiamo che questa equivalenza vale in generale per tutte le coppie di segmenti ottenuti dall'intersezione di una linea retta parallela a PR e GL, con i triangoli GPR and EPR.

Essendo ABCD un quadrato, abbiamo $DC = OM$ quindi $OF = OM$. Di conseguenza i triangoli FOE e OME sono congruenti (perché sono ad angolo retto e hanno i due cateti uguali).

Per similarità, anche PRE e PNE sono triangoli congruenti, e questo implica

$$PR = PN, \quad (5)$$

quod erat demonstrandum.

Nella Figura 10 abbiamo considerato il caso di un'immagine virtuale quadrata, perché gli studiosi hanno sempre considerato una griglia quadrata da deformare usando le regole anamorfiche. Schott [18] considera il caso di griglie non quadrate, ma descrive semplicemente come applicare il metodo di Nicéron a questi casi, senza impegnarsi in alcuna dimostrazione. La procedura geometrica che abbiamo appena esposto può essere generalizzata a un'immagine rettangolare, come dimostrato nell'Appendice 2, alla quale rimandiamo i lettori interessati alla dimostrazione completa dell'assioma di Nicéron.

La Figura 10 aiuta a capire perché il disegno anamorfico appare sollevato dal piano in cui si trova. L'apparente tridimensionalità è un'illusione creata dalla nostra mente, che 'sposta' l'immagine anamorfica dal piano dove è stata disegnata su un piano virtuale, perché il nostro sistema occhio-cervello percepisce il disegno in DGLC nelle proporzioni corrette e familiari solo sul piano ABCD. In altri termini, l'immagine 'vera' in DGLC evoca un'immagine 'virtuale' in ABCD, perpendicolare ad essa, e tra le due immagini la nostra mente sceglie quella familiare e proporzionata (anche se virtuale), scartando l'immagine distorta. Questa illusione è in accordo con la teoria della Gestalt [32], per cui le informazioni oggettive che arrivano agli occhi sono elaborate e modificate dal sistema percettivo cerebrale in modo da corrispondere alle precedenti esperienze. L'illusione tridimensionale (3-D) è più efficace quando l'anamorfosi è '*veduta per un solo forame*' [12] cioè con un solo occhio, in modo da perdere la visione binoculare (stereopsi¹¹) che fornisce la percezione di profondità, come spiegato nella referenza [33]. Una seconda ragione per osservare l'anamorfosi attraverso un foro è ridurre il conflitto tra immagine reale e virtuale, escludendo il contesto che aiuta a riconoscere la corretta collocazione dell'immagine nello spazio. Infatti, la percezione degli oggetti varia a seconda del contesto in cui si trovano, in accordo con la Gestalt [32]. Dal foro è più facile concentrare l'attenzione sulla sola immagine, e questo aiuta a percepire l'immagine frontalmente, sul piano virtuale.

5. Anamorfosi catottriche, a scomposizione del soggetto e tridimensionali

Oltre ai disegni anamorfici prospettici, costruiti in modo da fornire le proporzioni corrette del soggetto osservando l'anamorfosi da un punto di vista eccentrico privilegiato, esistono altre anamorfosi, dette catottriche, in cui la distorsione è realizzata in modo da restituire le proporzioni corrette del disegno osservando l'anamorfosi indirettamente, non già sulla superficie su cui è tracciata, dove appare deformata da qualunque punto di vista, ma tramite la riflessione da uno specchio curvo, di solito un cilindro o un cono metallico lavorato a specchio. L'aberrazione ottica del riflesso compensa la deformazione del disegno anamorfico e lo rende proporzionato e riconoscibile. Il primo trattato sulle anamorfosi catottriche è pubblicato nel 1630 da Jean-Louis Vaulezard [15], ma già intorno al 1620 diverse anamorfosi catottriche cilindriche circolavano in Francia grazie al pittore Simon Vouet che le aveva importate dall'Oriente e raffigurate nei suoi disegni¹².

Nel seguito descriviamo le anamorfosi catottriche cilindriche e coniche, mentre le anamorfosi catottriche sferiche non saranno trattate in questo saggio, rimandando il lettore interessato alla referenza [34].

¹¹ La stereopsi è la capacità percettiva di analizzare le piccole differenze tra le immagini provenienti dai due occhi. Tali differenze sono usate dal cervello per ottenere informazioni sulla profondità e sulla posizione spaziale dell'oggetto osservato: cioè, la visione tridimensionale.

¹² Nel 1611 Vouet si trovava a Costantinopoli, dove poté osservare le anamorfosi catottriche di fattura cinese che erano ancora sconosciute in Europa [19]. Il disegno allegorico di Vouet *Otto satiri che osservano uno specchio anamorfico con un elefante* (1625 circa), è considerato la prima rappresentazione di un'anamorfosi cilindrica in Europa ed è attualmente esposto presso il Hessisches Landesmuseum, Darmstadt, vedi

www.hlmd.de/fileadmin/user_upload/4.Simon_Vouet__Satyrn_beobachten_die_Anamorphose_eines_Elefanten__Foto_Wolfgang_Fuhrmannek__HLMD.jpg

A completare la panoramica, descriveremo anche le anamorfosi in 3 dimensioni, analizzando il caso della stanza di Ames, e le anamorfosi a scomposizione del soggetto.

5.1 Anamorfosi catottriche cilindriche

La Figura 11 illustra il metodo proposto da Nicéron, che segue una procedura analoga a quella esposta nella Figura 7, cioè la divisione del disegno originale in una griglia di caselle quadrate e la loro “proiezione” in una griglia (in questo caso a simmetria cilindrica) dove le caselle quadrate sono deformate in porzioni di corone circolari. Per rettificare l’anamorfosi bisogna osservare il suo riflesso da uno specchio cilindrico posto al centro del disegno della Figura 11, il cui diametro deve essere uguale al lato orizzontale del disegno originale. Infine, l’osservatore deve trovare il punto di osservazione frontale dal quale il disegno riflesso appare nelle proporzioni corrette. Ad esempio, nella Figura 12 mostriamo un’anamorfosi cilindrica attribuita a Nicéron, il cui riflesso nello specchio cilindrico consente di ammirare il dipinto nelle proporzioni corrette.

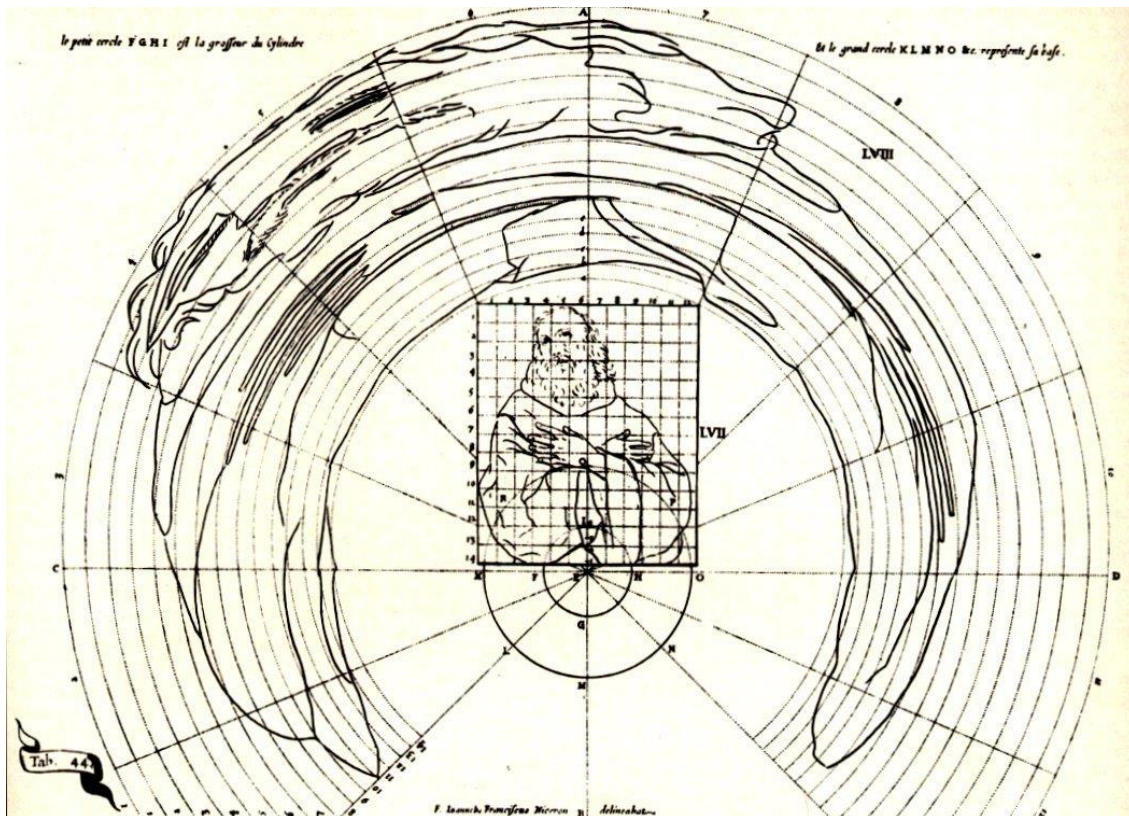


Figura 11. Anamorfosi catottrica a simmetria cilindrica secondo Nicéron. Il ritratto di S. Francesco di Paola nel rettangolo centrale è deformato trasformando i quadratini della griglia in settori di corone circolari. Riportando il tratto di disegno di ciascuna casella quadrata nella corrispondente casella di corona circolare, si ottiene l’anamorfosi del ritratto originale. Uno specchio cilindrico con diametro uguale al lato orizzontale del rettangolo, posto sopra il cerchio al centro, permette di osservare il disegno nelle corrette proporzioni tramite il riflesso del disegno anamorfico. Tratto da [16].

Nicéron [16] nota che la costruzione geometrica delle anamorfosi cilindriche è approssimata:

...questa costruzione è fatta senza tener conto degli angoli d’incidenza e di riflessione e senza determinare la distanza e l’altezza dell’occhio: non affermerò quindi che sia una dimostrazione perfetta di tutte le regole della catottrica.

Infatti, i calcoli esatti presentati in [29] mostrano che la griglia geometrica della Figura 11 è valida quando l’osservatore si trova a distanza infinita dal cilindro.



Figura 12. Anamorfosi catottrica cilindrica (1635 circa) attribuita a Nicéron con soggetto *Re Luigi XIII davanti al crocifisso, con angelo*. Olio su tela, 50 cm x 66,7 cm. Il riflesso dello specchio cilindrico introduce una deformazione ottica uguale e opposta alla deformazione del disegno anamorfico, permettendo di vedere l'immagine nelle proporzioni corrette. Gallerie nazionali di arte antica di Roma. Foto degli autori.

Per distanze non infinite, i settori circolari cambiano forma, perché i segmenti radiali non sono linee rette, non sono equispaziati e non convergono in un unico vertice come nella Figura 11. Inoltre, lo specchio cilindrico deve essere collocato in posizione leggermente arretrata rispetto al cerchio centrale, come nella Figura 12.

In questo saggio non entriamo nei complessi dettagli matematici dell'anamorfosi cilindrica, rimandando i lettori interessati ai calcoli pubblicati nella referenza [29].

5.2 Anamorfosi catottriche coniche

Anche per le anamorfosi catottriche coniche conviene seguire il ragionamento geometrico di Nicéron, che semplifica l'approccio originale di Vaulezard [15]. Nella Figura 13 a sinistra, un cerchio (all'interno del quale sarà disegnata l'immagine originale) è diviso in 6 corone circolari e altrettanti raggi, per un totale di 36 settori. Questi settori sono riportati sulla base dello specchio conico solido ed è tracciata una linea che congiunge il punto di vista dell'osservatore in E con ogni punto che delimita i settori (segmenti da E-N fino a E-J nella Figura 13 a sinistra).

L'intersezione di ciascun segmento con il cono è il punto di riflessione del corrispondente punto dell'anamorfosi sul piano della base del cono. Dal punto F, simmetrico di E rispetto al prolungamento della superficie del cono, si tracciano le linee che passano per i suddetti punti di riflessione, fino ad arrivare al piano su cui poggia il cono.

Abbiamo ottenuto una corrispondenza tra i punti J-K-L-M-N-O del disegno originale con i punti anamorfici P-Q-R-S-T-U sul piano della base del cono e quindi una corrispondenza univoca tra i 36 settori originali e i settori anamorfici.

Ad esempio, nella Figura 13 a sinistra il settore GHIJ corrisponde al settore anamorfico WVIP. In questo modo, ogni settore del cerchio è deformato in settori di corone circolari aventi raggi differenti.

La deformazione anamorfica è rettificata quando l'osservatore, posto sopra il vertice dello specchio conico, guarda il riflesso dell'anamorfo, vedi la Figura 14.

In termini matematici, per costruire l'anamorfo conico dobbiamo eseguire una trasformazione di coordinate da anelli concentrici di raggio r ad anelli di raggio r' , vedi la Figura 13 a destra.

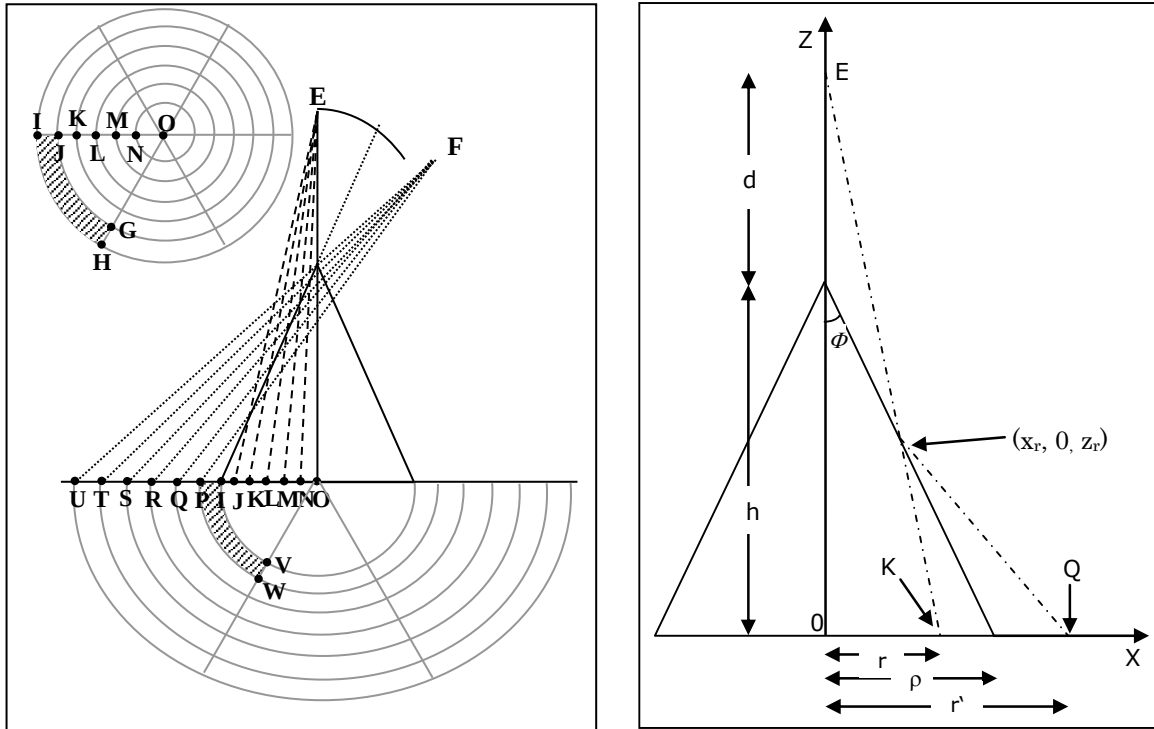


Figura 13. A sinistra, schema utilizzato da Niceron in [16] per costruire anamorfo coniche. Il disegno originale è dentro un cerchio suddiviso in 36 settori, riportati sulla base del cono. Questi settori sono proiettati all'esterno del cono grazie alla "riflessione" delle linee di vista corrispondenti. A destra, sezione dello specchio conico. L'osservatore in E vede il riflesso del punto Q come se fosse in K. Disegno degli autori, tratto da [35].

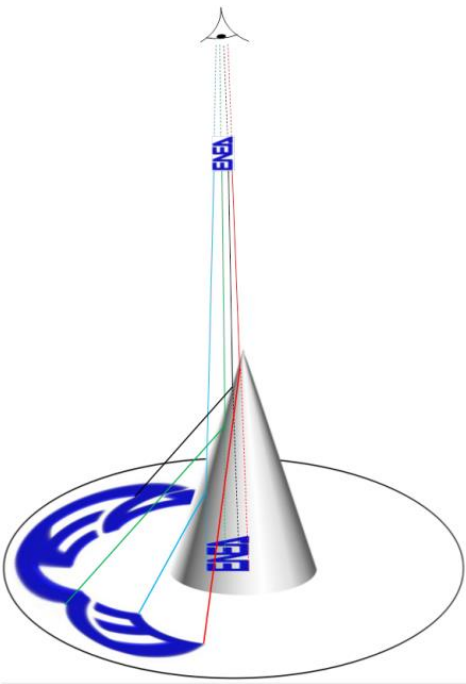


Figura 14. L'anamorfo conico della parola ENEA disegnata accanto allo specchio conico è irriconoscibile, ma l'osservatore posto sopra il vertice dello specchio la percepisce nelle corrette proporzioni e capovolta, come se fosse sulla base dello specchio stesso. Le linee tratteggiate mostrano il percorso dei raggi riflessi dallo specchio conico verso l'osservatore e il loro proseguimento ideale alla base del cono, come percepito dall'osservatore. Disegno degli autori.

I calcoli geometrici nell'Appendice 3 forniscono la seguente relazione tra r' ed r :

$$r' \approx r + \frac{2(\rho - r)}{1 - \tan^2 \phi} \quad (6)$$

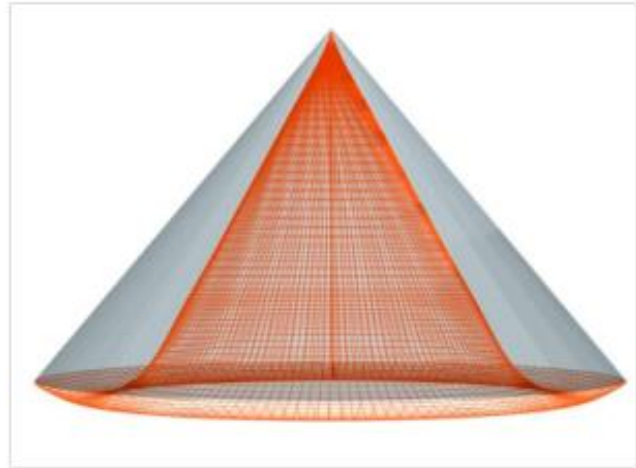
dove il significato delle variabili è riportato nella Figura 13 a destra. Per definizione, $r' > \rho > r$. Come spiegato nell'Appendice 3, l'equazione (6) è valida nel caso più comune, in cui l'osservatore si trova a una distanza dal vertice del cono molto maggiore dell'altezza dello stesso cono. Inoltre, è necessario che $h > \rho$ e questa condizione corrisponde a $\phi = \arctan(\rho/h) < 45^\circ$.

Sin dagli anni '80 del secolo scorso l'equazione (6) è stata usata per progettare anamorfo coniche [36], anche usando software dedicati, con risultati soddisfacenti. Gli studiosi accettano la costruzione geometrica di Niceron [16] della Figura 13, che assume l'immagine virtuale

dell'anamorfose giacente sul piano della base del cono. Peraltro, l'osservatore percepisce l'immagine virtuale proprio alla base del cono, in accordo con Nicéron.

Ricordiamo che l'immagine riflessa da uno specchio appare come se si trovasse dietro lo specchio stesso ed è chiamata 'immagine virtuale' giacché i raggi che arrivano ai nostri occhi partono da un soggetto virtuale: invero, non c'è nessun oggetto reale dietro lo specchio. In questo caso, avendo a che fare con uno specchio curvo, ci aspettiamo che l'immagine virtuale (cioè riflessa) non si trovi su un piano. Infatti, nella referenza [35] sono presentati i calcoli analitici esatti che consentono di scoprire la vera forma a rilievo tridimensionale della superficie dell'immagine virtuale delle anamorfosi catottriche coniche, illustrata nell'esempio della Figura 15.

Figura 15. In azzurro, specchio conico avente angolo al vertice pari a $2\Phi = 76^\circ$. La griglia rossa interna al cono è la superficie 3-D dell'immagine virtuale dell'anamorfose conica (cioè, dell'immagine riflessa). Elaborazione degli autori, tratta da [35].



La Figura 15 mostra che l'immagine virtuale formata dallo specchio conico si trova su una superficie ondulata all'interno dello stesso specchio, che si estende dal vertice fino sotto il piano della base del cono. Abbiamo già sottolineato che guardando l'immagine anamorfica riflessa dallo specchio conico, percepiamo l'immagine rettificata sulla superficie piana della base del cono,

in accordo con la costruzione geometrica nelle Figure 13 e 14 e in disaccordo con la superficie dell'immagine virtuale della Figura 15. Come si spiega questa contraddizione?

La percezione dell'immagine virtuale piana è un effetto illusorio, dovuto a diverse ragioni concomitanti. Come in tutte le anamorfosi, anche in quella conica l'immagine corretta si percepisce meglio se osservata con un solo occhio, in modo da perdere la percezione della profondità [33]. Senza percezione della profondità, l'immagine virtuale ci appare più piatta di quanto lo sia in realtà.

Inoltre, per apprezzare al meglio l'immagine riflessa bisogna osservarla a una distanza dalla base dello specchio conico maggiore di 4 volte l'altezza del cono. Ad esempio, l'immagine nella Figura 20 a destra (che commenteremo nel §6) è stata fotografata a 110 cm dalla base dello specchio conico alto 18 cm, cioè è osservata dal singolo 'occhio' della macchina fotografica a una distanza oltre 6 volte l'altezza del cono. In questo caso, se applichiamo la formula della profondità di campo PC della macchina fotografica al nostro occhio [37] otteniamo

$$PC = \frac{2s^2 \times c}{D \times f} \cong 11 \text{ cm} \quad (7)$$

dove $s = 110 \text{ cm}$ è la distanza tra l'oggetto e il cristallino dell'occhio, $c = 2,6 \text{ micrometri}$ è la dimensione media di un fotorecettore (cono) nella parte centrale della retina, $f = 1,7 \text{ cm}$ è la distanza tra cristallino e retina, e $D = 0,35 \text{ cm}$ è il diametro medio della pupilla in condizioni normali d'illuminazione.

L'equazione (7) fornisce una PC che è minore dei 18 cm di altezza dello specchio conico, quindi non è abbastanza grande da impedire la percezione dell'immagine virtuale elevata rispetto al piano della base dello specchio. Ciononostante, nella Figura 20 noi percepiamo l'intera immagine a fuoco sul piano della base. Ciò accade perché la visione umana, inclusa la PC dell'occhio, è governata dall'interazione occhio-cervello che introduce adattamenti e variazioni rispetto al funzionamento delle macchine fotografiche [37]. In particolare, la PC dell'occhio risente della nostra istintiva tendenza ad accomodare a fuoco l'intera immagine, chiudendo l'iride per ridurre il diametro della pupilla allo scopo di incrementare la PC.

Di fatto, la chiusura dell'iride è un meccanismo automatico, inconscio, e quindi indipendente dalla nostra volontà [37]. È sufficiente che l'iride si chiuda fino a $D = 0,2 \text{ cm}$ affinché la stessa equazione (7) fornisca una

PC = 18,5 cm, maggiore dei 18 cm dell'altezza del cono e quindi sufficiente a percepire l'intera immagine come se fosse a fuoco. Infine, la memoria delle precedenti esperienze [32] ci convince che stiamo osservando un'immagine piatta sulla base del cono.

5.3 Anamorfosi tridimensionali e loro percezione

Le anamorfosi prospettiche e catottriche sono disegnate su un piano, cioè in 2-D. Esistono anche anamorfosi 3-D, la più famosa delle quali è la cosiddetta 'stanza di Ames' [38] ideata dall'avvocato e fisiologo Adelbert Ames nel 1946, in cui una delle pareti laterali è più lunga e più alta dell'altra parete. Di conseguenza, la parete opposta all'osservatore è un trapezio obliquo e il soffitto o il pavimento (o entrambi) sono inclinati. Le porte, le finestre e riquadri sulle pareti sono anch'essi trapezi, vedi la Figura 16a.

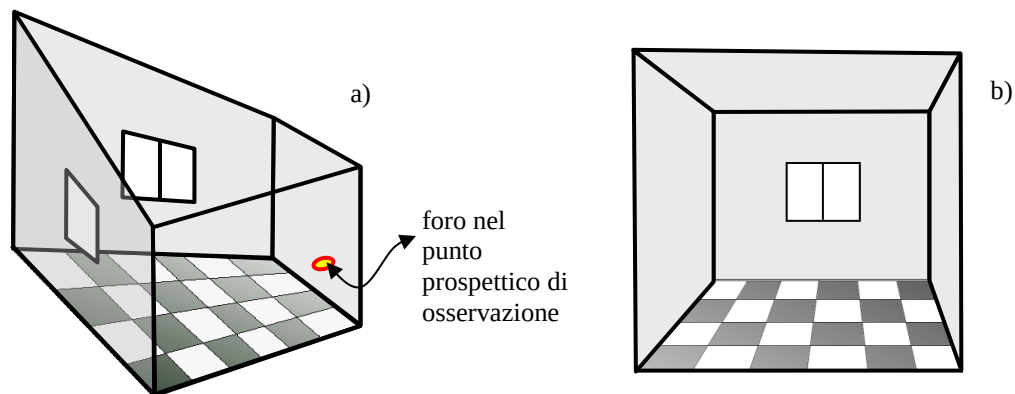


Figura 16 a) Stanza distorta di Ames. b) La stessa stanza appare simmetrica e senza distorsioni se vista attraverso il foro posto nel punto prospettico sulla parete: si tratta di un'anamorfosi tridimensionale. Disegno degli autori.

Tuttavia, quando osserviamo la stanza attraverso un foro (*veduta per un solo forame*) posto nel punto prospettico, la stanza ci appare simmetrica e di forme regolari, vedi la Figura 16b.

Inoltre, due persone di uguale altezza che si pongono agli angoli a sinistra e a destra in fondo alla stanza di Ames ci appaiono di altezza diversa, perché si trovano a distanze differenti rispetto a noi e perché il loro capo si trova a diversa distanza dal soffitto, vedi la Figura 17.

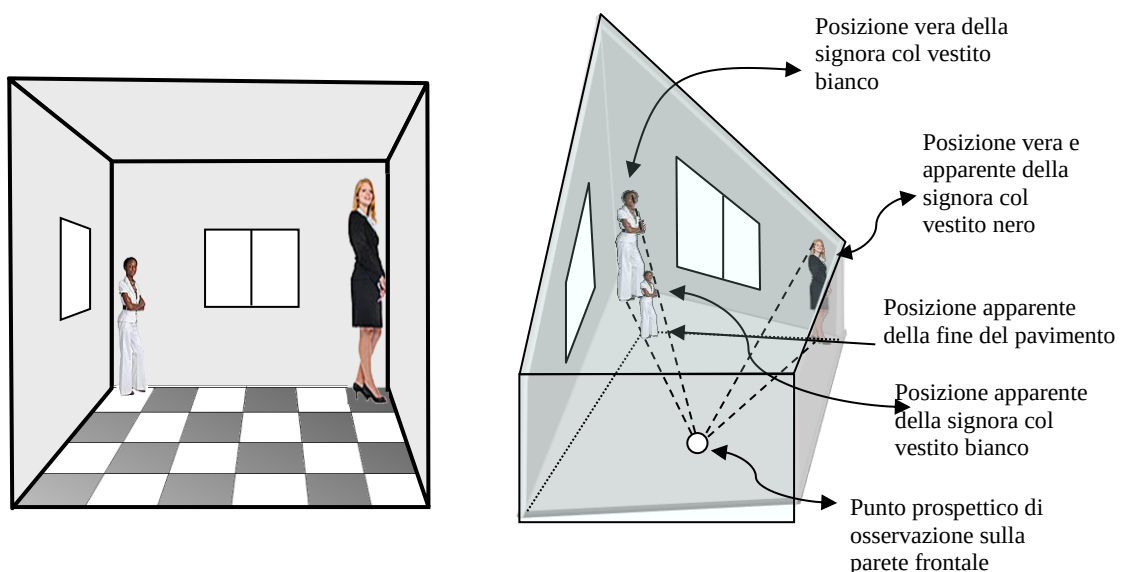


Figura 17. A sinistra: viste dal punto prospettico, due persone di uguale altezza appaiono molto diverse quando si pongono agli angoli in fondo alla stanza di Ames della Figura 16. A destra, la camera vista dall'alto: la prospettiva aiuta a spiegare perché le persone appaiono diverse. Disegno degli autori.

Come possiamo spiegare l'effetto illusorio delle Figure 16b e 17?

L'osservatore della stanza di Ames percepisce una situazione ambigua, che consente due possibili interpretazioni. La sensazione che la stanza 'deve' essere regolare domina il quadro percettivo e il nostro cervello preferisce ammettere che stiamo osservando un nano e un gigante piuttosto che la stanza sia deformata. Anche quando le persone si scambiano di posto e il nano diventa un gigante e viceversa, l'evidente contraddizione non disturba la nostra convinzione che la stanza sia regolare¹³. Si può quindi comprendere come l'anamorfosi della camera di Ames abbia fornito importanti informazioni sulla psicologia della percezione visiva, sulla priorità data alle caratteristiche topologicamente invarianti rispetto alle proprietà euclidee, sul fenomeno percettivo cosiddetto della 'costanza delle dimensioni', e di come le informazioni oggettive trasferite dagli occhi siano elaborate dal cervello in modo da corrispondere alle precedenti esperienze. In fondo, tutte le stanze viste in precedenza sono regolari, e hanno il soffitto alla stessa altezza rispetto al pavimento!

Lo studio delle anamorfosi tridimensionali ha quindi confermato che la percezione umana è condizionata dalle forme e dall'esperienza. D'accordo con Ittleson [38], quando osserviamo un oggetto la sua immagine sulla retina genera una serie di segnali elettrici, inviati al cervello tramite il nervo ottico. Questi segnali elettrici non sono univoci, perché possono corrispondere a diverse configurazioni, nello spazio, dell'oggetto percepito. A tutte le possibili configurazioni noi associamo il modello che conosciamo attraverso l'esperienza. Così il cervello costruisce un ponte fra il mondo come ci sembra essere (spazio proiettivo) e il mondo com'è (spazio Euclideo), in modo da soddisfare la nostra mente, che tende a percepire quello che ci aspettiamo di vedere, in base al *deja vu* [32, 39].

5.4 Anamorfosi a scomposizione del soggetto

Come suggerisce il nome, si tratta di anamorfosi in cui il disegno è diviso in sezioni, disposte in modo sfalsato, che si ricompongono se osservate da un opportuno punto prospettico. A nostra conoscenza, i primi esempi si trovano nelle opere di Barozzi [10] e di Barbaro [11]. Alla fine del capitolo dedicato a quella che

Barbaro definisce 'bella e secreta parte di Prospettiva' troviamo il disegno di un volto, visto di profilo, scomposto in tre sezioni verticali. Le tre sezioni, disegnate su altrettante superfici, sono sfalsate lateralmente e a diversa distanza dal punto di vista. Quando l'osservatore si pone nel punto prospettico, le tre sezioni visivamente si ricongiungono e appare il disegno originale.

L'anamorfosi a scomposizione del soggetto, che qualche decennio dopo sarà definita 'in planis striatis' da Schott ([18], pag. 149) è stata ripresa da Nicéron, come mostrato nella Figura 18.

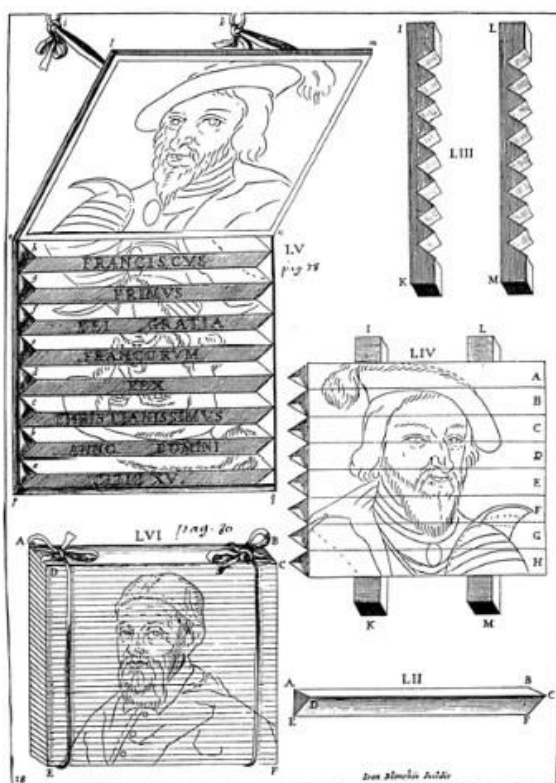


Figura 18. Costruzione delle anamorfosi per scomposizione del soggetto. Il disegno del volto di Francesco I re di Francia è realizzato su 8 lati A-H (LIV) di prismi a sezione triangolare isoscele (LII). Alloggiando i prismi su due regoli dentellati (LIII) e osservandoli da un punto di vista opportuno, si ottiene la ricostruzione del disegno originale. Ripetendo la stessa operazione su un altro lato degli stessi prismi con un nuovo disegno -o un motto su diverse righe- si ottiene una doppia figura visibile osservando l'anamorfosi da un unico punto, avendo l'accortezza di porre uno specchio piano inclinato dietro alla pila dei prismi (LV). Tratto da [16].

Nicéron suggerisce di usare listelli lignei prismatici a sezione triangolare isoscele (Figura 18, disegno LII) collocati su due asticciolate dentellate (disegno LIII) in modo che i listelli si inseriscano con lo spigolo in basso

¹³ Vedi ad esempio <https://www.youtube.com/watch?v=n84Ib5Eielg>

e siano affiancati. Il soggetto è disegnato sulla tavola di listelli affiancati (disegno LIV). La stessa procedura può essere eseguita su un altro lato dei listelli, ottenendo due immagini distinte oppure un'immagine e una frase. Accostando i prismi con i lati non dipinti poggiati su un piano e ponendosi a un'altezza tale per cui i lati dipinti appaiono visivamente affiancati, è possibile ricostruire l'immagine originale.

È interessante notare che Niceron descrive questa tecnica all'inizio del libro dedicato alle anamorfosi catottriche. Il motivo è lo specchio piano inclinato a 30° dietro i prismi affiancati, illustrato nel disegno LV della Figura 18, in modo che da un unico punto di vista è possibile ricostruire sia l'immagine disegnata su un lato dei prismi direttamente a vista, sia quella disegnata sull'altro lato, visibile nel riflesso dello specchio.

Lo stesso principio è oggi utilizzato per creare anamorfosi di grandi dimensioni, con disegni dipinti su castelli, edifici e pareti sfalsate, i quali appaiono sospesi in aria solo dal punto di vista prospettico. La Figura 19 mostra un esempio di anamorfosi moderna a scomposizione del soggetto.



Figura 19. Anamorfosi a scomposizione creata nel 2012 da Felice Varini, intitolata “Nove triangoli danzanti”.

Sopra: l'anamorfosi vista dal punto prospettico, in cui appaiono 9 triangoli sospesi in aria, tra le botti e il soffitto.

Sotto: due foto da punti di vista laterali evidenziano la deformazione e la frammentazione dei triangoli dipinti su pareti e colonne.

Sul web si possono trovare interessanti filmati di anamorfosi a scomposizione¹⁴.

Nella referenza [40] i lettori interessati possono trovare i dettagli

matematici per progettare anamorfosi a scomposizione del soggetto in funzione del punto di osservazione.

6. A cosa servono le anamorfosi?

Oltre alle curiosità matematiche e storiche della prospettiva inversa, è utile occuparsi oggi di anamorfosi?

La risposta è affermativa, e nel seguito illustriamo a titolo di esempio sei applicazioni pratiche delle anamorfosi, non solo in campo artistico.

6.1 Crittografia anamorfica

Il primo esempio di uso delle anamorfosi fuori dal campo artistico si trova nel libro “L'inganno degli occhi” di Pietro Accolti [41], politico e scienziato alla corte di Carlo de' Medici in Firenze, il quale descrive disegni anamorfici usati per occultare messaggi segreti e mappe militari. In una lettera, una frase o un disegno può essere camuffato tramite una deformazione anamorfica ed essere decifrato solo guardando in modo radente la sua riflessione in un opportuno specchio posto perpendicolare al foglio. Infatti, l'anamorfosi è tuttora una valida tecnica crittografica, assai difficile da decifrare quando realizzata tramite specchi conici, come mostrato nella referenza [35].

¹⁴ Vedi ad esempio il filmato pubblicitario ‘In with the New’

https://www.youtube.com/watch?time_continue=2&v=T4WFzvzkCKc

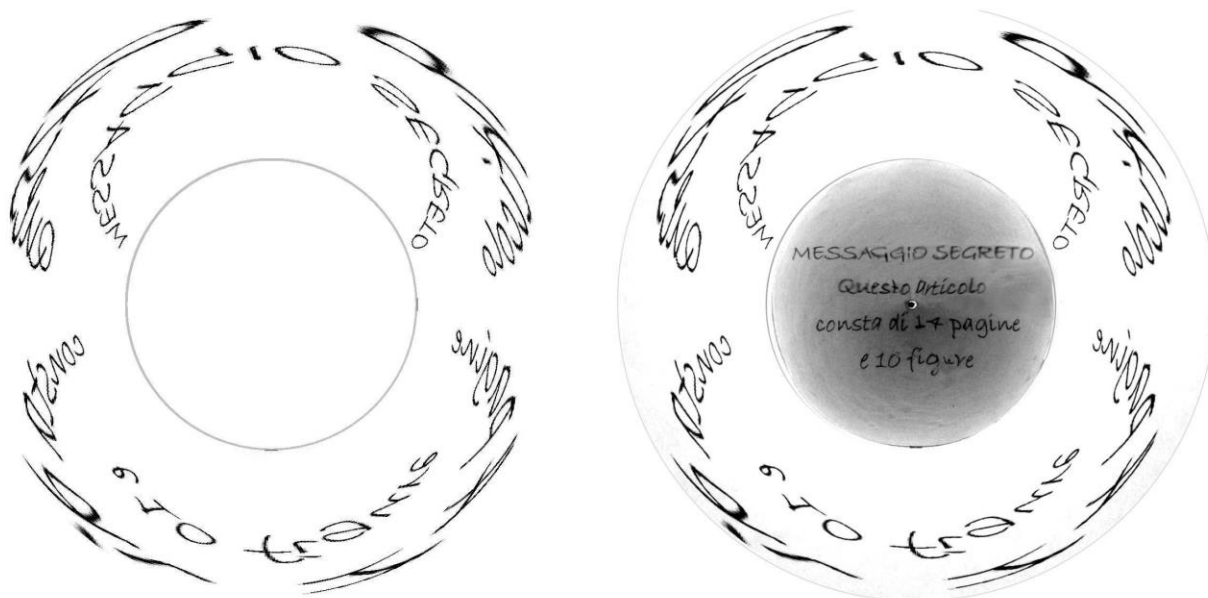


Figura 20. A sinistra, un messaggio ‘criptato’ tramite anamorfosi conica. A destra, il messaggio è decifrato guardando dall’alto il suo riflesso da uno specchio conico di dimensioni opportune posto sul cerchio del disegno a sinistra. Foto degli autori, tratta da [35].

Ad esempio, nella Figura 20 a sinistra mostriamo un messaggio criptato tramite deformazione da anamorfosi catottrica conica. Riuscite a leggere cosa c’è scritto?

È davvero difficile decifrare il messaggio, ma se usiamo un cono riflettente con la circonferenza della base identica al cerchio al centro del disegno e un’altezza opportuna, possiamo leggere il messaggio nascosto, come si vede nella foto a destra della Figura 20.

In pratica, ponendo lo specchio conico sopra il cerchio al centro dell’anamorfosi della Figura 20, l’osservatore posto sopra il vertice dello specchio percepisce l’immagine virtuale della scritta ricostruita come se fosse disegnata sulla base del cono, vedi anche la Figura 14.

Come accennato nel §5.2 l’inversione radiale e la diffusione angolare della riflessione da specchio conico (specialmente nella parte vicina al vertice del cono che è distribuita lungo il cerchio periferico dell’anamorfosi) generano un’immagine anamorfica decettiva, difficile da decifrare senza avere a disposizione lo specchio conico con le dimensioni appropriate.

6.2 Elaborazione anamorfica di immagini per antiterrorismo

La matematica per disegnare le anamorfosi è utile nella progettazione di sistemi di ripresa-immagine da una posizione eccentrica rispetto alla scena da osservare. Nell’ambito del Progetto Europeo FORLAB (Forensic Laboratory for in-situ evidence analysis in a post blast scene¹⁵), ad esempio, abbiamo usato procedimenti anamorfici per progettare i sistemi ottici d’irraggiamento e di ricezione del sistema Laser Induced Fluorescence (LIF) per il riconoscimento di materiali pericolosi in uno scenario post attentato su un’area di 144 metri quadri. Nella configurazione richiesta, infatti, il fotogramma inquadrato dal sistema di ripresa è deformato in modo anamorfico a causa della posizione eccentrica del sistema stesso, come illustrato nella Figura 21. Di conseguenza, la localizzazione degli oggetti rivelati come potenzialmente pericolosi dal segnale di LIF non si può ottenere direttamente dal fotogramma inquadrato (in basso a sinistra nella Figura 21) ma deve essere riportata sulla superficie reale (vista dall’alto della Figura 21) ricostruita tramite procedimento anamorfico inverso dello stesso fotogramma.

¹⁵ Progetto FORLAB, http://cordis.europa.eu/project/rcn/102645_it.html

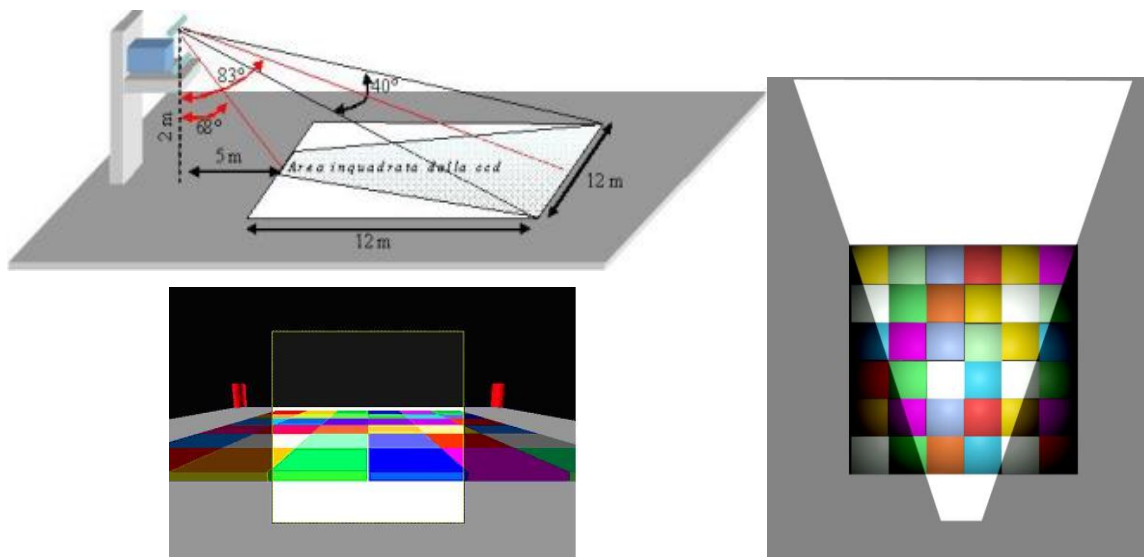


Figura 21. In alto a sinistra: sistemi d'irraggiamento laser e di ricezione LIF, entrambi posti a 2 m di altezza e 5 m distanti dal lato più vicino dell'area investigata pari a (12×12) m². In basso a sinistra: fotogramma inquadrato dalla telecamera. A destra: visione dall'alto della proiezione dello stesso fotogramma sul terreno da cui arrivano i segnali LIF. Disegno degli autori.

6.3 Paesaggi anamorfici

Le tecniche anamorfiche sono usate da architetti paesaggisti nella progettazione di giardini e paesaggi rurali. Uno dei più famosi giardini anamorfici è stato progettato e realizzato da François Abélanet nella piazza prospiciente l'Hôtel de Ville, sede del municipio di Parigi, dove è stato esposto dal 24 giugno al 17 luglio 2011.

All'apparenza si tratta di un normale giardino di forma ellittica che si estende per 1.500 metri quadri, con un terreno ondulado e impreziosito da alberi e sentieri, vedi la Figura 22 a sinistra. Tuttavia, se osservato dal punto di vista prospettico, situato a una decina di metri di distanza dal bordo del giardino e oltre due metri sopra il livello della piazza, il giardino si trasforma sorprendentemente in un mappamondo verde¹⁶ solcato da sottili righe verticali e orizzontali a mo' di meridiani e paralleli, vedi la Figura 22 a destra.



Figura 22. Il 'giardino effimero' realizzato a Parigi nel 2011 da François Abélanet. La foto a sinistra ritrae il giardino visto dalla piazza. La foto a destra mostra lo stesso giardino dal punto di vista prospettico, posto oltre due metri sopra il livello stradale. La dimensione delle persone vicine al 'polo nord' del 'mappamondo' rivela l'effettiva estensione del giardino. Oppure rinforza l'idea che si tratti di un mappamondo? Foto tratte da [7].

¹⁶ Il giardino effimero di Abélanet: www.youtube.com/watch?v=zbslrtrfrgs

6.4 Arte di strada

Esempi spettacolari di anamorfosi prospettiche sono realizzati da artisti ‘di strada’, che disegnano su edifici, piazze e marciapiedi delle città. Tra i maggiori artisti dell’anamorfosi di strada citiamo Kurt Wenner, Julian Beever, Manfred Stader, Edgar Muller, Eduardo Relero e Leon Keer. Una ricerca dei loro nomi in internet permette di ammirare foto e filmati di opere anamorfiche di grande impatto visivo. Le dimensioni di queste opere sono imponenti, fino a diverse centinaia di metri quadri e l’effetto ottico è dirompente¹⁷.

Una forma originale di anamorfosi di strada, non dipinta, è realizzata da uno degli autori, P.V., nell’Infiorata che si tiene ogni anno a Cusano Mutri, in provincia di Benevento. Ad esempio, la Figura 23 mostra il disegno anamorfico di un barattolo pieno di colori che versa il contenuto in una buca sulla strada.



Figura 23. Disegno anamorfico colorato con petali e semi, visto dal punto prospettico calcolato con il metodo descritto nell’Appendice 1. Notiamo i colori versati nel buco della pavimentazione e il cartello in piedi sulla strada. Foto degli autori durante l’Infiorata 2016 di Cusano Mutri.



La Figura 24 mostra lo stesso disegno osservato dalla posizione opposta al punto prospettico. L’intera figura è distesa sul piano stradale: non c’è nessuna buca e nessun cartello in piedi. La Figura 24 consente di apprezzare l’illusione 3-D della Figura 23.

A prima vista, è difficile riconoscere che le Figure 23 e 24 sono lo stesso disegno visto da due diversi punti di osservazione.

L’impressionante deformazione anamorfica visibile nella Figura 24 non è costante per tutte le parti del disegno, ma aumenta progressivamente con la distanza dal punto di osservazione: ad esempio, il barattolo della Figura 23 appare piccolo rispetto alla macchia dei colori versati, mentre nella Figura 24 la dimensione reale del barattolo è enorme rispetto alle parti del disegno che sono più vicine all’osservatore.

Figura 24. Lo stesso disegno della Figura 23 visto dalla posizione opposta al punto prospettico. Da qui possiamo apprezzare la distorsione anamorfica del disegno e l’illusione tridimensionale della Figura 23. Gli spettatori sullo sfondo aiutano a valutare la notevole estensione dell’anamorfosi. Foto degli autori.

¹⁷ Vedi ad esempio il filmato pubblicitario ‘An impossible made possible’ www.youtube.com/watch?v=TVuxpFTevX0

Il calcolo quantitativo della deformazione in funzione della distanza dal punto di osservazione è presentato nell'Appendice 1.

Per la loro oggettiva bellezza e potenza illusionistica, val bene riportare nelle Figure 25 e 26 altre due immagini floreali anamorfiche, per le quali valgono gli stessi commenti delle Figure 23 e 24.

Figura 25. Disegno anamorfico colorato con petali e semi, visto dal punto prospettico. Notiamo il cartello in piedi sull'erba e la rana stilizzata che sembra emergere dal cartello. Foto degli autori durante l'Infiorata 2018 di Cusano Mutri.

Le anamorfosi floreali delle Figure da 23 a 26 richiedono un lungo lavoro di preparazione e un faticoso allestimento, ma il vento le porta via già dopo poche ore dal completamento dell'opera. Il fatto di essere 'effimere' aumenta il pregio delle anamorfosi floreali, fa tornare il pensiero all'antico proverbio *'le cose belle durano poco'* e amplifica la nostra gratitudine verso coloro che dedicano ingegno, tempo, fatica e alzate notturne per donarci la breve ma intensa emozione della prospettiva inversa floreale.



Figura 26. Lo stesso disegno della Figura 25 osservato dalla posizione opposta al punto prospettico, da dove possiamo apprezzare la distorsione (accelerazione prospettica) dell'anamorfosi e l'illusione 3-D della Figura 25. Il cartellone che sembrava in piedi in realtà è piatto sulla strada e la rana che sembrava avere dimensioni comparabili con il cartellone in realtà è piccolissima rispetto al disegno anamorfico. Foto degli autori.

6.5 Cartelloni pubblicitari

La più diffusa applicazione odierna delle tecniche anamorfiche si trova nelle scritte pubblicitarie ai bordi dei campi sportivi. Si tratta di insegne disegnate distorte sul suolo, inquadrare dalla telecamera (*veduta per un solo forame* [12]) che riprende l'evento, che appaiono in televisione come classici cartelloni pubblicitari, rialzati e ben proporzionati. La Figura 27 rende evidente l'illusione 3-D, in modo analogo (anche per la stessa tipologia di soggetto, i cartelloni) alle Figure 25 e 26.



Figura 27. Scritte pubblicitarie anamorfiche come appaiono dalle tribune del campo di calcio (a sinistra) e in televisione (a destra).

6.6 Didattica

In questo saggio abbiamo evidenziato il carattere squisitamente interdisciplinare delle anamorfosi, che è particolarmente appropriato alla didattica. Infatti, dal punto di vista dello studente è interessante svelare le nascoste connessioni tra discipline distanti come geometria e Gestalt, prospettiva e immagini virtuali, leggi ottiche e fisiologia dell'occhio.

In campo didattico, gli autori hanno realizzato numerosi dimostratori anamorfici, che sono stati presentati in diverse edizioni di Frascati Scienza, Notte della Ricerca, Open day della Ricerca, e anche in alcune trasmissioni RAI di divulgazione scientifica [42].

La Figura 28 mostra una foto d'insieme di alcuni dimostratori anamorfici realizzati in ENEA, dove si riconoscono anamorfosi catottriche coniche e cilindriche, una camera di Ames in scala 1:15, testi crittografati da anamorfosi conica, anamorfosi su superficie conica sia interna che esterna.



Figura 28. Foto d'insieme di alcuni dimostratori anamorfici realizzati in ENEA per uso didattico. Da sinistra a destra riconosciamo diverse anamorfosi catottriche coniche e cilindriche, una stanza di Ames in scala 1:15 completa di sistema di controllo remoto per la movimentazione elettro-meccanica delle figure, anamorfosi su superfici coniche interne ed esterne di Paperino e di un'automobile rossa, meglio descritte nella Figura 29.

In particolare, la Figura 29 mostra l'anamorfofi da superficie conica esterna visibile in alto a destra della Figura 28, che non va confusa con l'anamorfofi catottrica conica descritta nel §5.2. Si tratta infatti di una figura piana deformata in modo da ritrovare le giuste proporzioni solo quando piegata e 'chiusa' a formare un cono.

Figura 29. In basso: disegno anamorfico da superficie conica esterna, avente dimensioni 25 cm in orizzontale e 12,5 cm in verticale. In alto: lo stesso disegno ripiegato in modo da formare un cono e fotografato in asse, a circa 60 cm di distanza dal vertice del cono.



Analogamente al caso delle anamorfofi catottriche coniche, l'anamorfofi da superficie conica deve essere osservata in asse, ad una distanza maggiore dell'altezza del cono e usando la consueta accortezza di chiudere un occhio per ridurre la profondità di campo percepita. Come mostrato nella Figura 28, è possibile realizzare queste anamorfofi sulla superficie sia esterna sia interna del cono e la deformazione anamorfica è differente nei due casi. La procedura geometrica per disegnare le anamorfofi su superfici coniche è stata descritta da Nicéron [16] e ripresa da Kircher [6], liber II, pars II, propositio IX, pagina 185.

Un altro dimostratore anamorfico realizzato dagli autori è mostrato nella Figura 30.



Figura 30. Finale di partita a scacchi, la situazione è equilibrata, chi vincerà?

Si tratta di un finale di partita, normale all'apparenza. Giunti quasi al termine di questo saggio, tuttavia, abbiamo imparato a dubitare delle apparenze e in questo caso è bene diffidare, come mostrato nella Figura 31 che mostra lo stesso finale di partita della Figura 30 da un punto di vista laterale.

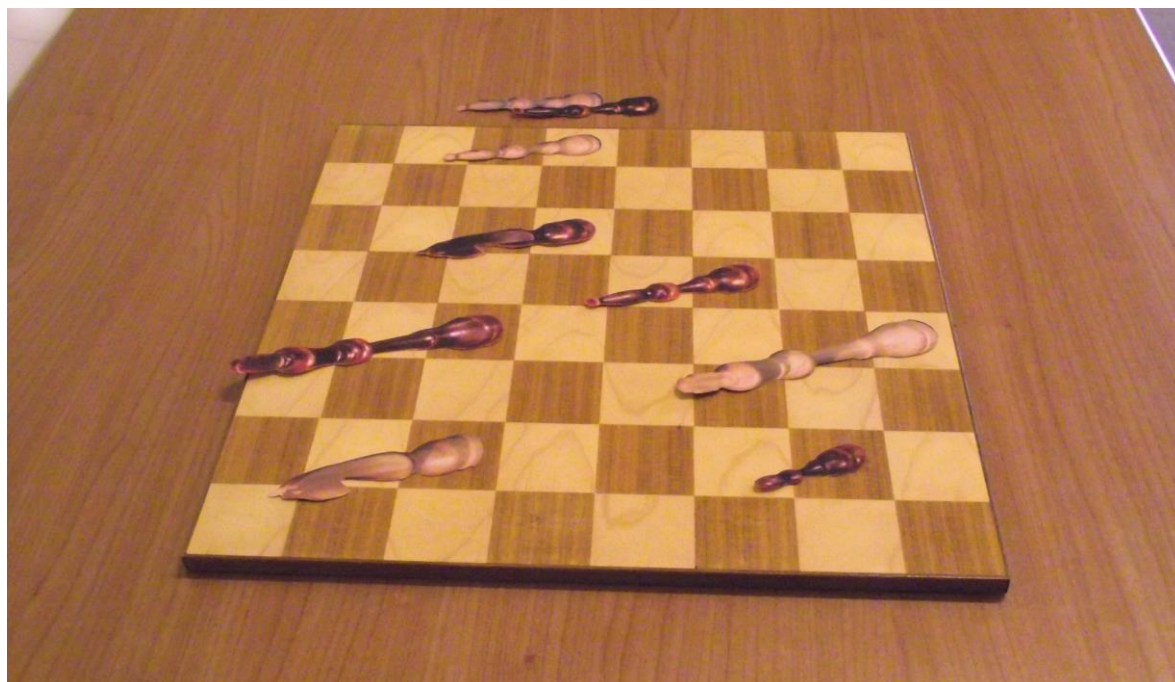


Figura 31. Lo stesso finale di partita della Figura 30 visto da una posizione laterale. Tutti i pezzi degli sacchi sono anamorfosi stampate su carta e posate sulla scacchiera, la quale è l'unica cosa vera della figura 30. Anche in questo caso, siamo stupiti dalla potenza dell'illusione 3-D dell'anamorfosi vista dal punto prospettico, mostrata nella Figura 30.

Dunque, la Figura 31 rivela che la scacchiera della Figura 30 è vera, mentre tutti i pezzi degli scacchi sia all'interno che all'esterno della scacchiera sono figure anamorfiche, stampate su carta e collocate orizzontalmente. Un piccolo inganno, semplice ma di grande efficacia.

7. Riassunto e commenti conclusivi

L'anamorfosi è una costruzione prospettica difforme dalle regole della prospettiva centrale codificate nel Quattrocento per cui la costruzione di un'immagine sul quadro colloca l'osservatore di fronte al quadro stesso: è dalla posizione centrale che bisogna guardare il quadro per vedere correttamente la scena rappresentata in prospettiva, vedi la Figura 5. Viceversa, se il punto di vista da cui è idealmente proiettata la scena è eccentrico, si trova cioè lateralmente rispetto al quadro, in posizione obliqua (vedi le Figure 6 e 10), si crea una situazione anomala: l'oggetto raffigurato appare deformato e irriconoscibile se visto dall'abituale posizione centrale (vedi la Figura 4). Per vedere l'immagine rettificata nelle corrette proporzioni, l'osservatore deve spostarsi nella posizione dalla quale è stata costruita la proiezione.

Per realizzare un disegno anamorfico occorre invertire il concetto di rappresentazione, creando una prospettiva 'inversa' [12] ossia 'accidentale' [8, 25]. Infatti, l'oggetto rappresentato non appare più oltre il piano di proiezione dell'immagine, nella profondità virtuale della scena rappresentata in prospettiva centrale, bensì appare in una zona compresa tra la superficie dipinta e l'osservatore (vedi la Figura 10). Questo è il motivo per cui le figure anamorfiche sembrano sollevarsi dalla parete e d'accordo con Leonardo, *'non ti potrà mai persuadere che detta figura non sia dispiccata dal muro'* [8]. L'apparente tridimensionalità è un'illusione creata dalla nostra mente, che 'sposta' l'immagine anamorfica dal piano dove è disegnata su un piano virtuale, perpendicolare ad esso, e tra le due immagini noi scegliamo quella familiare e proporzionata (nonostante sia virtuale), scartando l'immagine reale e distorta.

La scelta dell'immagine virtuale può essere facilitata guardando l'anamorfose attraverso un foro che escluda la parte del contesto che aiuta a percepire la corretta collocazione dell'immagine nello spazio.

L'anamorfose è un affascinante capitolo della prospettiva, una miscela di geometria e psicologia della percezione usata dagli artisti per disegnare inganni prospettici, immagini che appaiono indecifrabili se viste frontalmente e diventano riconoscibili solo osservandole da un punto di vista privilegiato, posto lateralmente rispetto al disegno, oppure guardando l'anamorfose riflessa da un opportuno specchio curvo, laddove una doppia deformazione (del disegno anamorfo e dello specchio) consente la rettificazione del disegno (vedi le Figure 12 e 14). Viene in mente un'analogia, forse non troppo ardita, nel costruire un'affermazione con due negazioni.

Le prime anamorfose prospettiche furono realizzate a fine Quattrocento da Piero della Francesca [9] nella Pala Montefeltro (Figura 1) e da Leonardo da Vinci [4, 5], ma la parola 'anamorfose' fu coniata circa due secoli dopo da Athanasius Kircher nel trattato "Ars magna lucis et umbrae" [6] pubblicato a Roma nel 1646.

Alcuni studi anamorfici del Seicento furono caratterizzati da motivazioni religiose e metaforiche. D'accordo con i matematici e frati dell'ordine dei Minimi Nicéron [16] e Maignan [26], la Natura nasconde un progetto divino codificato in termini matematici e ottici. Nicéron e Maignan cercavano nell'anamorfose un'analogia con l'ordine spirituale della creazione divina, che non è evidente a tutti. Così come l'osservatore distratto vede nelle anamorfose un insieme confuso di linee e forme, che assumono un significato solo osservando il disegno dal punto di vista prospettico, l'ordine nascosto del Creato rivela la sua armonia solo se visto dal punto di vista privilegiato della fede. D'accordo con De Rosa [22],

Nicéron fu affascinato per tutta la sua esistenza dall'idea che nella natura si nascondesse un codice segreto divino di cui la matematica, e in primis l'ottica, potevano farsi interpreti, elaborando un lessico espressivo che attraverso la magia artificiale ne riproducesse la segreta natura configurativa, le leggi formanti del suo farsi e del suo divenire.

La metafora del Creato come un'anamorfose che deve essere osservata dal punto di vista della fede in Dio per trasformare le apparenti schizofrenie e ingiustizie del mondo in bellezza e armonia sarà ripresa dal filosofo e matematico Gottfried Wilhelm Leibniz, nei primi anni del Settecento, nel tentativo di spiegare perché Dio permetta che ci sia il male. Scrive Leibniz [43]:

È come in quelle invenzioni prospettiche, nelle quali certi bei disegni non sembrano altro che confusione, finché non vengano esaminati dal punto di vista corretto o siano osservati mediante una certa lente o uno specchio. È soltanto sistemandole e servendosene nel modo opportuno, che diventano l'ornamento di una stanza. Così, le apparenti deformità dei nostri piccoli mondi si raccolgono, generando bellezza in quello grande e non hanno in sé nulla che si opponga all'unità di un principio universale infinitamente perfetto. Al contrario, accrescono l'ammirazione per la sua saggezza, che fa servire il male a un bene più grande.

Pensando l'anamorfose come metafora visiva, si comprende perché la sua pratica raggiunge l'apice del successo in età Barocca, in cui si supera la ricerca della sorpresa in grado di generare lo stupore degli osservatori oppure l'occultamento di disegni erotici o esoterici in voga nel Cinquecento. Piuttosto, ci si rivolge alle opere illusionistiche e alle prospettive accelerate per il gusto dell'ossimoro, dell'estetica bizzarra, dell'inganno dei sensi, dell'incertezza del punto di vista che porta ad una relazione attiva e cinetica tra osservatore e realtà fenomenica.

Le regole geometriche per progettare e disegnare anamorfose sono state fissate da Nicéron e da altri studiosi citati in bibliografia [6, 9 – 14, 16 – 18, 26 – 29, 41]. Tuttavia, dopo un'accurata ricerca nei testi originali, non siamo riusciti a trovare il calcolo esplicito della posizione del punto di osservazione delle anamorfose prospettiche. Risulta che gli studiosi che si sono occupati di anamorfose non hanno fornito una prova matematica rigorosa dell'assioma per cui il punto prospettico si trova a una distanza dal piano del disegno uguale alla lunghezza del segmento PR nella Figura 7.

Nel §4 abbiamo proposto una dimostrazione analitica dell'assioma di Nicéron basata sul teorema delle intercette di Talete. Come mostrato nell'Appendice 2, la nostra dimostrazione è valida in generale, per anamorfose d'immagini sia a simmetria quadrata, sia rettangolare.

Oltre alle curiosità matematiche, filosofiche e storiche della prospettiva inversa, abbiamo illustrato sorprendenti applicazioni delle anamorfosi nello studio dei processi psico-percettivi (Figure 16 e 17), nella crittografia (Figura 20), nelle inquadrature laterali di immagini per mappare vaste superfici post attentato (Figura 21), nel progetto di paesaggi (Figura 22), nella pubblicità (Figura 27), nell'arte di strada (Figure 23, 24, 25 e 26) e nella didattica (Figura 28).

In particolare, sia i processi psico-percettivi dell'illusione tridimensionale dei disegni anamorfici (vedi le Figure 10, 19, 22, 23, 25, 27, 30) sia lo studio della percezione di anamorfosi in tre dimensioni come la camera di Ames (Figure 16 e 17) hanno fornito importanti informazioni su come la percezione umana sia condizionata dalle forme e dall'esperienza e dal contesto, in accordo con la Gestalt, fungendo da apripista ai più recenti sviluppi della neuro-estetica. D'accordo con il neurobiologo Semir Zeki [44],

Because all art obeys the laws of the visual brain, it is not uncommon for art to reveal these laws to us, often surprising us with the visually unexpected.

che si può tradurre *Poiché tutta l'arte obbedisce alle leggi della percezione, non è raro che l'arte riveli queste leggi, spesso sorprendendoci con il "visualmente inaspettato"*.

Le regole geometriche e analitiche per costruire anamorfosi e i calcoli per determinare la posizione del punto prospettico proposti in questo saggio possono essere facilmente adattati a scopi didattici e divulgativi. Inoltre, l'ampia bibliografia e gli esempi di applicazioni pratiche delle anamorfosi, anche fuori dal campo artistico, possono allargare lo scopo degli esercizi e suggerire la realizzazione di anamorfosi progettate e realizzate in casa, vedi ad esempio le Figure 28, 29, 30 e 31.

Più in generale, abbiamo mostrato un'interazione creativa e sovrapposizioni inaspettate –per certi versi inedite– tra la psicologia, le arti figurative, la geometria, la percezione, l'arte di strada, l'ottica, i paesaggi. Ci piace pensare che lo studio interdisciplinare delle anamorfosi possa realizzare un ponte tra la cultura umanistica e la cultura scientifica, in un raro esempio di 'Cultura Totale'.

APPENDICI MATEMATICHE

Nessuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni.

Leonardo da Vinci, Trattato della Pittura, Parte prima.

Chi biasima la somma certezza delle matematiche si pasce di confusione, e mai porrà silenzio alle contraddizioni delle sofistiche scienze, colle quali s'impara uno eterno gridore.

Leonardo da Vinci, Fogli di Windsor 19084, Royal Library, Windsor

Appendice 1. Relazione analitica tra i punti di un disegno e i punti del corrispondente disegno anamorfico prospettico. Calcolo della distorsione

Vogliamo dedurre le equazioni analitiche che trasformano ogni punto (ξ, η) di un disegno nel punto corrispondente (x, y) sul piano anamorfico. Le equazioni di ‘mappatura’ di disegni anamorfici già sono state discusse, ad esempio, in [7, 29], ma qui proponiamo un approccio più didattico [45].

Analogamente alla Figura 10, la Figura 32 mostra il quadrato ABCD che è proiettato nel trapezoide DGLC se osservato dal punto N. Il punto di vista N si trova alla distanza d dalla base CD di ABCD e ad un'altezza h dal piano dove giace l'anamorfo.

Un punto generico S interno ad ABCD, di coordinate (ξ, η) rispetto all'origine degli assi O, è connesso analiticamente al punto T interno a DGLC avente coordinate (x, y) rispetto alla stessa origine O. Infatti, i triangoli VOQ e VPQ giacenti sul piano verticale YZ, sono simili, e pertanto $\frac{VO}{OQ} = \frac{VP}{PN}$, cioè $\frac{y}{\eta} = \frac{d+y}{h}$, vedi

la Figura 32.

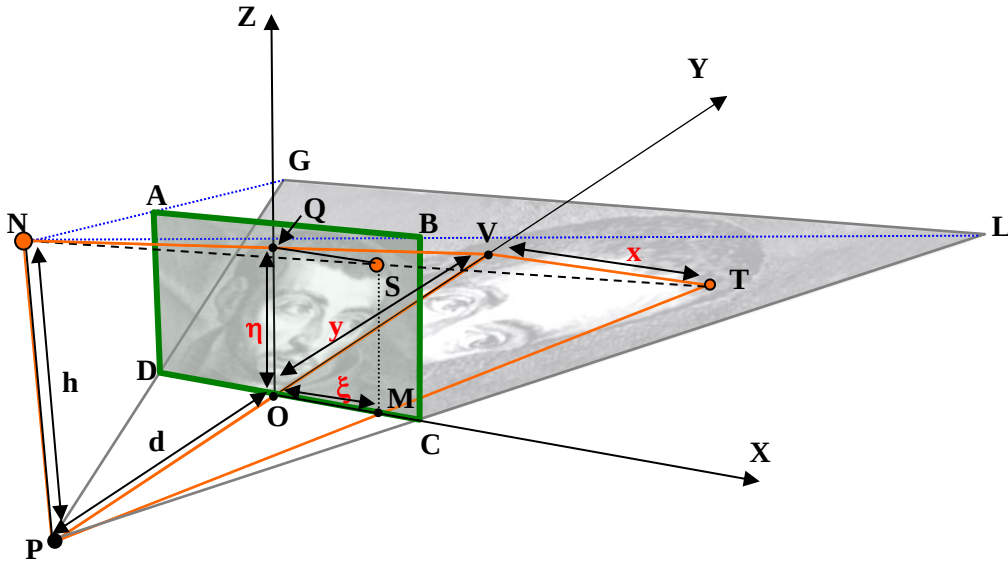


Figura 32. Riportiamo qui la Figura 10 per trovare la corrispondenza analitica di ciascun punto del disegno virtuale in ABCD nel disegno anamorfico in DGLC, come spiegato nel testo. Disegno degli autori.

L'ultima equazione fornisce la relazione tra y e η :

$$y = \frac{d \cdot \eta}{h - \eta} \quad (A1)$$

In modo analogo, i triangoli POM e PVT, giacenti sul piano orizzontale XY, sono simili, e pertanto $\frac{PO}{OM} = \frac{PV}{VT}$, cioè,

$$\frac{d}{\xi} = \frac{d+y}{x} . \quad (A2)$$

Combinando le equazioni (A2) e (A1), otteniamo la relazione tra x e η :

$$x = \frac{h \cdot \xi}{h - \eta} . \quad (A3)$$

Le equazioni (A1) e (A3) permettono di mappare qualsiasi punto di coordinate (ξ, η) di un disegno nel corrispondente punto di coordinate (x, y) nell'anamorfo.

La deformazione lungo x e y è proporzionale a $R_x = x / \xi$, e a $R_y = y / \eta$ rispettivamente. Dalle equazioni (A1) e (A3) abbiamo:

$$R_x = \frac{h}{h - \eta} \quad \text{e} \quad R_y = \frac{d}{h - \eta} . \quad (A4)$$

L'equazione (A4) ci dice che la deformazione anamorfica aumenta quando $h \geq \eta$, cioè, se in punto prospettico N si trova a incidenza radente rispetto al punto di coordinate (ξ, η) in ABCD, vedi la Figura 32. Al contrario, se $h \gg \eta$, N è quasi perpendicolare al punto (ξ, η) e le coordinate (x, y) tendono a zero, collassando l'anamorfo.

Proponiamo un esempio di applicazione delle equazioni (A1), (A3) e (A4) all'anamorfo della Figura 23 vista dal punto prospettico situato a un'altezza $h = 1.7$ m rispetto al piano anamorfico e distante $d = 4.5$ m dal disegno. La Figura 33 mostra come appare l'anamorfo dal punto di vista prospettico, sul piano verticale e virtuale analogo ad ABCD della Figura 32.

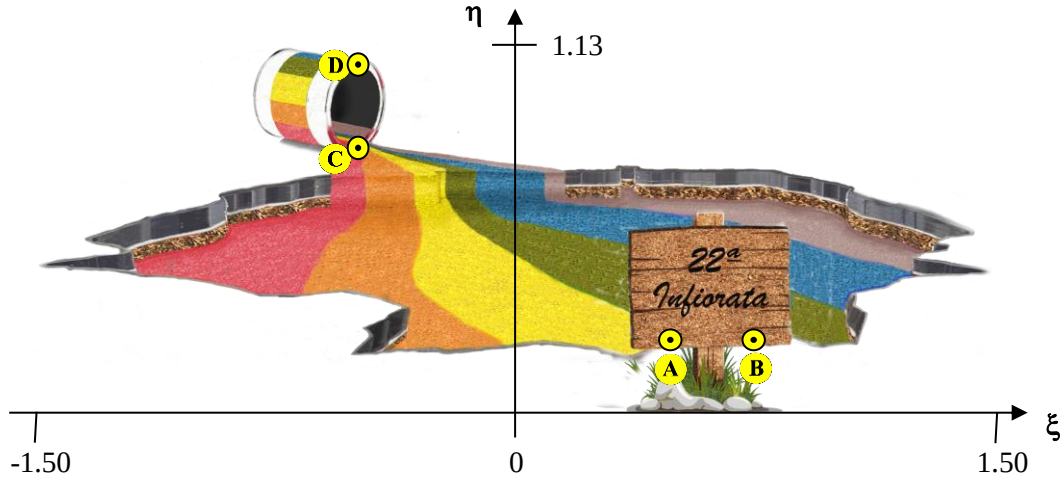


Figura 33. L'anamorfo della Figura 23 vista dal punto prospettico, in cui sono evidenziati 4 punti usati nell'esempio numerico. Gli assi sono sul piano verticale –e virtuale– ABCD della Figura 32, e i valori numerici sono in metri. Disegno degli autori.

Consideriamo due punti, A di coordinate $(\xi_A, \eta_A) \equiv (0.48, 0.21)$ e B di coordinate $(\xi_B, \eta_B) \equiv (0.74, 0.21)$, situati sul bordo del cartello e quindi vicini all'osservatore, che si trovano a una distanza relativa di 26 cm, vedi la Figura 33. Tramite le equazioni (A1) e (A3) i punti A e B sono proiettati nei punti $(x_A, y_A) \equiv (0.55, 0.63)$ and $(x_B, y_B) \equiv (0.84, 0.63)$ sul piano anamorfico: questi ultimi si trovano ad una distanza relativa di 30 cm, appena maggiore della distanza sul piano virtuale di 26 cm. L'equazione (A4) fornisce una moderata deformazione $R_x = 1.15$ e $R_y = 3.02$ per il punto (ξ_A, η_A) e $R_x = 1.14$ e $R_y = 3.02$ per il punto (ξ_B, η_B) .

La situazione cambia se consideriamo due punti nella Figura 33 più lontani dall'osservatore. Ad esempio, i punti $C \equiv (-0.48, 0.83)$ e $D \equiv (-0.48, 1.09)$, che si trovano alla stessa distanza relativa di 26 cm come nel caso precedente, sono proiettati nei punti $(x_C, y_C) \equiv (-0.94, 4.29)$ e $(x_D, y_D) \equiv (-1.34, 8.04)$, che si trovano ad una distanza relativa di 380 cm, quasi 15 volte la distanza sul piano virtuale! La deformazione (accelerazione prospettica) diventa significativa, con $R_x = 1.95$ e $R_y = 5.17$ per il punto C e $R_x = 2.79$ e $R_y = 7.38$ per il punto D.

Questi valori forniscono dati quantitativi della deformazione anamorfica visibile nella Figura 24.

Appendice 2. Calcolo analitico del punto di osservazione delle anamorfosi prospettiche nel caso generale di un disegno a simmetria rettangolare

In questa Appendice presentiamo i calcoli analitici della posizione del punto prospettico di osservazione delle anamorfosi quando il disegno virtuale è a simmetria rettangolare [45].

A questo scopo, modifichiamo il quadrato ABCD della Figura 10 in un rettangolo, aumentando la dimensione del lato verticale $DA = OM = CB$ di una quantità pari alla lunghezza del segmento $AA_1 = MM_1 = BB_1$, come mostrato nella Figura 34.

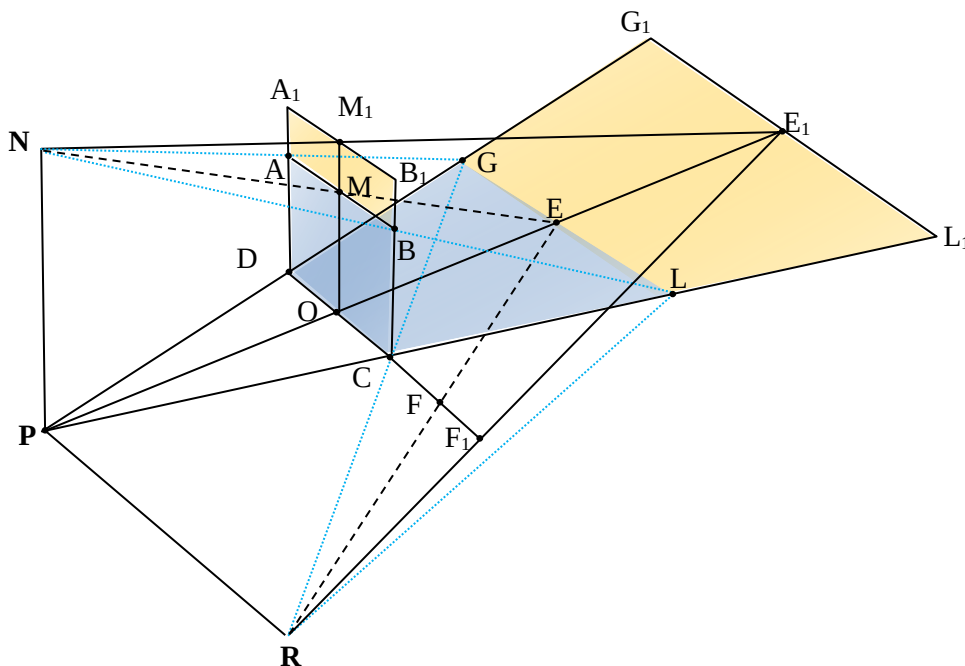


Figura 34. Schema geometrico per il calcolo del punto prospettico nel caso dell'anamorfosi di un disegno virtuale a simmetria rettangolare. Il disegno anamorfico giace nel trapezoide DCL_1G_1 e quando è visto dal punto prospettico N esso appare nelle proporzioni corrette, come se fosse disegnato nel rettangolo DCB_1A_1 che si trova su un piano perpendicolare a DCL_1G_1 . Disegno degli autori.

In accordo con le regole di Nicéron, il trapezoide $DGLC$ osservato da N sembra proiettato sul quadrato virtuale ABCD, essendo $PN = PR$. Nella nostra dimostrazione (vedi la Figura 10) abbiamo ottenuto $OF = DC = OM$, grazie alla congruenza dei triangoli PNE e PRE . Spostando E in E_1 (vedi la Figura 34) questa congruenza è ancora valida e, di conseguenza, $OF_1 = OM_1$ dimostrando quindi che la proiezione di M_1 , visto da N, è il punto di intersezione E_1 tra il prolungamento dei segmenti RF_1 e PO . Queste considerazioni sono valide anche se OM_1 è più corto di OM , cioè quando $DC > DA_1$.

Come possiamo adattare la costruzione di Nicéron alla Figura 34, o meglio a qualsiasi disegno a simmetria rettangolare?

D'accordo con Nicéron, tracciando due linee da P che arrivano a D e a C e fissato il punto R, la prima linea obliqua da tracciare è quella da R verso C che interseca l'estensione del segmento PD in G. Quando il disegno virtuale non è quadrato, dobbiamo adattare il procedimento come descritto nel seguito.

Con riferimento alla Figura 34, fissati i punti P, D e C (con DC uguale alla base del disegno virtuale) e il punto R, dal punto medio tra D e C tracciamo un segmento OF_1 uguale all'altezza del disegno virtuale DA_1 . Poi da R tracciamo una linea che passa in F_1 fino a incrociare l'estensione del segmento PO nel punto E_1 . Ora tracciamo una linea parallela a DC che passa in E_1 la quale incrocia la linea passante per P e D e per P e C, rispettivamente nei punti G_1 e L_1 . Avendo imposto che G_1L_1 sia parallelo a DC, abbiamo che G_1 e L_1 sono rispettivamente le proiezioni di A_1 e B_1 sul piano anamorfico visto da N, e il disegno anamorfico giace nel trapezoide DCL_1G_1 . Ora possiamo usare la stessa procedura di Nicéron nella Figura 7, tracciando le linee oblique da R al segmento G_1L_1 .

Nel procedimento appena descritto, non abbiamo cambiato la posizione dei punti N e R rispetto alla Figura 10. Di conseguenza, l'equivalenza $PN = PR$ è sempre valida, per immagini virtuali sia rettangolari, sia quadrate.

Appendice 3. Relazione analitica tra i punti di un disegno e i punti della corrispondente anamorfosi catottrica conica

Come spiegato nel §5.2, l'anamorfosi conica è una trasformazione di coordinate da anelli concentrici di raggio r ad anelli di raggio r' . Vogliamo dedurre la relazione tra r' ed r nell'approssimazione geometrica [35].

Consideriamo il disegno della sezione di un cono rappresentata dal triangolo isoscele TVU di raggio ρ , altezza h e di angolo al vertice pari a 2ϕ , vedi la Figura 13, riportata per comodità qui a destra.

Per definizione, $\phi = \arctan(\rho/h)$. Prolungando l'altezza h di un segmento pari a VE, lungo d , la retta che da E porta al punto K incontrerà la superficie del cono nel punto R. L'angolo di incidenza β è analogo all'angolo di riflessione, per cui possiamo tracciare il segmento che passa per R e arriva sulla base su cui poggia il cono, nel punto Q. Il punto K, sotto la base del cono e distante r dal centro, è quindi il corrispettivo del punto Q, a distanza r' dal centro, che fa parte del disegno anamorfico.

Dal triangolo EVR abbiamo

$$\phi = \alpha + \beta .$$

cioè

$$2\phi - \alpha = \alpha + 2\beta .$$

La lunghezza r' è pari ad $r + QK$. Quest'ultimo segmento è pari alla differenza tra QP e KP che sono entrambi cateti di un triangolo rettangolo in P.

Detta a la distanza tra V e S, (S è la proiezione di R sull'altezza del cono, vedi figura) abbiamo:

$$QP = (h-a) \tan(\alpha+2\beta) = (h-a) \tan(2\phi - \alpha), \text{ e inoltre } KP = (h-a) \tan\alpha.$$

Pertanto:

$$r' = r + (h-a) \cdot [\tan(2\phi - \alpha) - \tan\alpha] . \quad (A5)$$

Poniamo

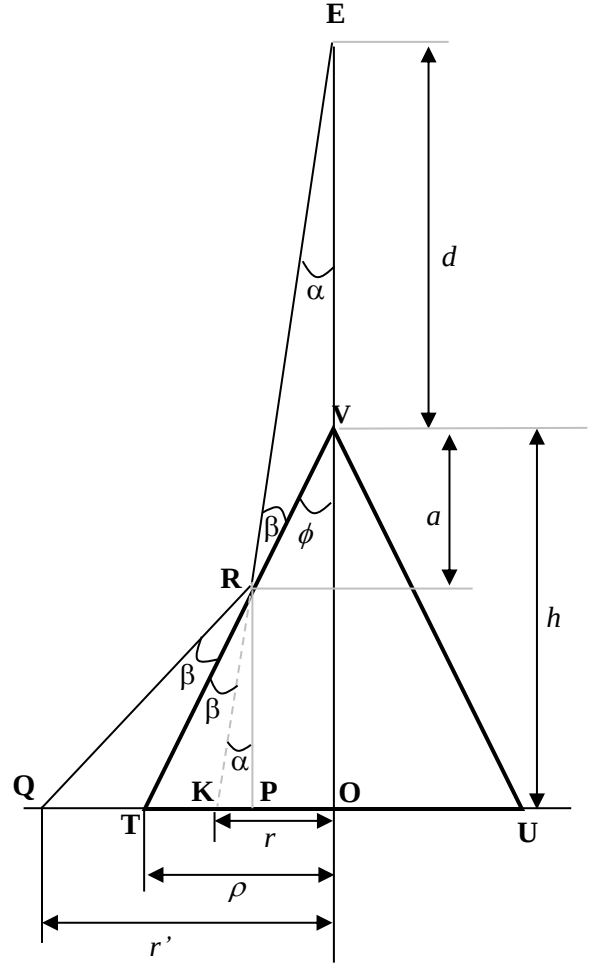
$$A = \tan(\alpha) = \frac{r}{d+h}$$

$$B = \frac{2}{\tan(2\phi)} = \frac{h^2 - \rho^2}{\rho h}$$

Quest'ultima uguaglianza si ottiene ricordando che $\tan\phi = \rho/h$. Infatti, usando l'equazione

$$\tan(2\phi) = 2 \frac{\tan\phi}{1 - \tan^2\phi} ,$$

possiamo scrivere



$$\tan(2\phi) = 2 \frac{\frac{\rho}{h}}{1 - \frac{\rho^2}{h^2}} = 2 \frac{\rho h}{h^2 - \rho^2}$$

da cui l'equazione per B scritta in precedenza.

Consideriamo ora i triangoli rettangoli VRS e VTO in figura. Per il criterio di similitudine abbiamo

$$VS / VO = RS / TO, \text{ quindi } a/h = (d+a) \cdot \tan \alpha / \rho = (d+a) \cdot A / \rho$$

da cui

$$a = h d A / (\rho - h A) \text{ e quindi } h - a = h \cdot \left(1 - \frac{d A}{\rho - h A} \right).$$

Riscriviamo l'equazione (A5) raggruppando i termini uguali e sostituendo il termine $(h-a)$:

$$r' = r + h \left(1 - \frac{d A}{\rho - h A} \right) \cdot [\tan(2\phi - \alpha) - \tan \alpha] \quad (A6)$$

Una nota formula di trigonometria sulla tangente della differenza di due archi ci permette di scrivere:

$$\tan(2\phi - \alpha) - \tan(\alpha) = \frac{\tan(2\phi) - 2 \tan \alpha - \tan(2\phi) \tan^2 \alpha}{1 + \tan(2\phi) \tan \alpha}$$

per cui

$$\tan(2\phi - \alpha) - \tan(\alpha) = \frac{2/B - 2A - 2A^2/B}{1 + 2A/B} = \frac{2(1 - AB - A^2)}{B + 2A} \quad (A7)$$

Sostituendo (A7) in (A5), infine, abbiamo

$$r' = r + h \left(1 - \frac{d A}{\rho - h A} \right) \left[2 \left(\frac{1 - AB - A^2}{B + 2A} \right) \right]. \quad (A8)$$

Ricordando che $A = r/(h+d)$, dall'equazione (A8) otteniamo:

$$r' = r + 2h \left(\frac{\rho - r}{\rho - h A} \right) \left(\frac{1 - AB - A^2}{B + 2A} \right) \quad (A9)$$

Nel frequente caso in cui l'osservatore si trova a una distanza $d \gg h$, l'equazione (A9) si semplifica in

$$r' \approx r + 2h^2 \frac{\rho - r}{h^2 - \rho^2} = r + \frac{2(\rho - r)}{1 - \tan^2 \phi} \quad (A10)$$

che è la relazione tra r' ed r cercata.

Questa approssimazione richiede $h > \rho$, e quindi $\phi = \arctan(\rho/h) < 45^\circ$.

Per stimare l'estensione di un'anamorfo conica, notiamo che la parte più esterna dell'anamorfo conica corrisponde alla parte del disegno originale vicina a $r = 0$. Di conseguenza, possiamo definire l'ingrandimento M dell'anamorfo rispetto al disegno originale come il rapporto tra r' massimo (per il quale $r \rightarrow 0$) e il raggio del cono. Dall'equazione (A10) otteniamo

$$M = \frac{2}{1 - \tan^2 \phi}.$$

Ad esempio, un cono di semiapertura $\phi = 30^\circ$ ha $M = 3$, e di conseguenza un disegno inscritto in un cerchio di 10 cm di diametro avrà il corrispondente disegno anamorfo inscritto in una corona circolare avente diametro maggiore pari a 30 cm e minore pari a 10 cm.

Grazie alla simmetria assiale, per trasformare un disegno nel suo anamorfismo conico è sufficiente che ogni punto del disegno originale, di coordinate polari (r, θ) , sia mappato nel corrispondente punto di coordinate (r', θ) , con r' legato ad r dall'equazione (A10). Tuttavia, il disegno anamorfico è più esteso di quello originale e di conseguenza non vi è una corrispondenza 1:1 tra i singoli punti dei due disegni. Volendo progettare un software per realizzare delle anamorfosi, dunque, è necessario invertire l'equazione (A10) e trovare, per ogni punto del disegno anamorfico, il corrispondente punto dell'immagine originale. In questo modo il piano anamorfico sarà uniformemente mappato, anche nel caso in cui la risoluzione dell'immagine originale non sia elevata.

Referenze e note

- [1] M. Kubovy, *La freccia nell'occhio. Psicologia della prospettiva e arte rinascimentale*, Padova, Franco Muzzio & C. Editore, 1992.
- [2] F. Camerota, *La prospettiva del Rinascimento. Arte architettura, scienza*. Milano, Electa Mondadori, 2006.
- [3] L.B. Alberti, *De pictura* (1435-1436), tradotta per m. Lodovico Domenichi, ed G. Gilito de Ferrari, 1547.
- [4] Leonardo da Vinci, *Codice Atlantico*, Milano, Biblioteca Ambrosiana, 1483-1518, fol. 98r (già 35v). I disegni nel fol. 98r. erano alla pagina web della Biblioteca Ambrosiana www.ambrosiana.eu/cms/content/1146-foglio-98---recto.html ma a seguito del rinnovo del portale web non sono accessibili al momento (Febbraio 2019). Nella pagina web citata era scritto: 'Non si avverte la sicura presenza della mano di Leonardo in nessuna parte del foglio. La scrittura è d'età posteriore a Leonardo; così i disegni, che rappresentano a sinistra l'ardito scorcio di un volto infantile; parte a matita e parte a penna. A destra un occhio visto di fronte (in alto) e quindi di scorcio.' Un'analogia opinione fu espressa da G. Piumati, trascrittore della riproduzione del Codice Atlantico pubblicata dalla Reale Accademia dei Lincei (Hoepli, Milano, 1894-1904), mentre una opinione opposta si trova in: F. Bassoli, *Leonardo da Vinci e la invenzione delle anamorfosi*, Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena vol. **69** (1938) pagg. 61-66.

Indipendentemente dall'attribuzione dei disegni del fol. 98r del Codice Atlantico, lo studio e la produzione di anamorfosi prospettiche da parte di Leonardo sono attestate dalla testimonianza di Lomazzo descritta nel §2, da una nota databile intorno al 1508 nel Codice Arundel, fol. 62r, 'Della prospettiva naturale mista colla prospettiva accidentale' e dal "Trattato della Pittura" (noto anche come Libro di Pittura) cap. 431 e 432, ed. 1890, una raccolta postuma di frammenti e annotazioni sulla teoria e pratica della pittura e della prospettiva, redatto dal suo fedele allievo ed erede Francesco Melzi intorno al 1550.
- [5] C. Pedretti, *Il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci*, Johnson Reprint Corporation, Harcourt Brace Jovanovich Publishers, 1978. Parte 1 vol. I-VI, pag. 68.
- [6] A. Kircher, *Ars Magna Lucis et Umbrae*, Roma, 1646. Liber II Pars II, p. 184.
- [7] P. Di Lazzaro, D. Murra, *Figurative art, perception and hidden images in inverse perspective*, Energia, Ambiente e Innovazione n. 1-2 (2013), pagg. 42-51.

<http://www.enea.it/it/seguici/pubblicazioni/pdf-eai/n.1-2-gennaio-aprile-2013/10-inverse-perspective-pdf>

Vedi anche P. Di Lazzaro, D. Murra, *L'anamorfosi tra arte, percezione visiva e prospettive bizzarre*, RT/2013/05/ENEA, 2013, <http://openarchive.enea.it/bitstream/handle/10840/4479/RT-2013-5-ENEA.pdf>
- [8] Leonardo da Vinci, Manoscritto A 2172, Parigi, Biblioteca dell'Istituto di Francia, 1490, fol 42v.
- [9] P. della Francesca, *De Prospectiva Pingendi* (1474 circa) Reggio Emilia, Biblioteca Comunale "A. Panizzi", ms. Reggiani A 41/2 (già A 44), fol. 98v.
- [10] J. Barozzi da Vignola, *Le due Regole della Prospettiva Pratica*, con i comentari del R.P.M. Egnatio Danti, Roma, 1583, pagg. 94-96.
- [11] D. Barbaro, *La Pratica della Perspettiva*, Venezia, 1568. Parte 5, pagg. 159-161.
- [12] G.P. Lomazzo, *Trattato dell'Arte della Pittura, Scoltura et Architettura*, Paolo Gottardo Pontio, Milano, 1585. Sesto libro, pagg. 335-336.
- [13] S. de Caus, *La Perspective avec la Raison des Ombres et Miroirs*, London, 1612, fol. 34-36.
- [14] S. Marolois, *Opera Mathematica ou Oeuvres Mathematiques Traictant de Geometrie, Perspective, Architecture, et Fortification*, The Hague, Johannes Janssonius, 1614. Quatriesme Partie de la Perspective, tavola 80, figure CCLXXIII, CCLXXIII e CCLXXV.
- [15] J.L. Vaulezard, *Perspective cylindrique et conique, ou traicte des apparences veues par le moyen des miroirs*, Paris, 1630. Un'edizione moderna con lo stesso titolo è stata pubblicata da Hachette Livre-Bnf, 2016.
- [16] J.F. Nicéron, *La Perspective Curieuse, ou Magie Artificielle des Effets Merveilleux*, Paris, Chez Pierre Billaine, 1638.

- [17] J.F. Nicéron, *Thaumaturgus Opticus seu Admiranda*, Paris, François Langlois, 1646.
- [18] K. Schott, *Magia Universalis Naturae et Artis*, Würzburg, 1657. Partis I Liber III Pars I, pagg. 100-115.
- [19] J. Baltrusaitis, *Anamorforesi o magia artificiale degli effetti meravigliosi*, Adelphi, 1978.
- [20] M. Arnaudo, *Il trionfo di Vertunno. Illusioni ottiche e cultura letteraria nell'età della Controriforma* Pacini Fazzi Editore, 2008 pag. 15.
- [21] A. De Rosa, *Passi nell'infinito: le opere dei Padri Emmanuel Maignan e Jean François Nicéron a Trinità dei Monti, Roma*, in: Jean François Nicéron. Prospettiva, catottrica e magia artificiale, Aracne Editrice (2013) pagg. 152-163.
- [22] A. De Rosa, *Le prospettive di Jean François Nicéron: tra teoria geometrico-matematica e sperimentazione artistica* in: La geometria descrittiva dalla tradizione alla innovazione, a cura di C. Cundari, R. Migliari. Aracne (2014) pagg. 95-120.
- [23] P. Di Lazzaro, D. Murra, *Anamorforesi nell'arte: l'affresco di San Francesco Di Paola a Trinità dei Monti, Roma*, in: San Francesco Di Paola. Un uomo, un calabrese, un santo nell'arte, nel cinema e nella letteratura, a cura di A. Batinti, A. Lamanna (Laruffa Editore, 2015) Cap. 3. www.academia.edu/13437695
- [24] A. Dürer, *Underweysung der Messung*, Nürnberg: s. n., 1525.
- [25] Leonardo da Vinci, *Codice Arundel*, vedi J.P. Richter, *The notebooks of Leonardo da Vinci*, vol.1 Dover editor (1970) § 109, pp. 64-65.
- [26] E. Maignan, *Perspectiva Horaria, sive de Horographia Gnomonica tum Theoretica, tum Practica*, Philippi Rubei, Roma, 1648. Liber Tertius, p. 438.
- [27] G. Huret, *Optique de Portraiture et Peinture*, Paris, 1670. Deuxieme Partie, p. 59.
- [28] A. Gitin, *Anamorphosis and distortion*, Optics and Spectroscopy vol. **88** (2000) pp. 472-474.
- [29] J. Hunt, B. Nickel, C. Gigault, *Anamorphic images*, American Journal of Physics vol. **68** (2000) pp. 232-237. Vedi anche K. Andersen, *The Mathematical Treatment of Anamorphoses from Piero della Francesca to Nicéron*, in History of Mathematics: States of the Art. Academic Press, 1996 pp. 3-28.
- [30] P. Di Lazzaro, D. Murra: *Calcolo analitico del punto di osservazione nelle anamorforesi prospettiche: dimostrazione dell'assioma di Nicéron*, RT/2015/23/ENEA (2015)
<http://openarchive.enea.it/bitstream/handle/10840/7219/RT-2015-23-ENEA.pdf>
- [31] Vedi ad esempio: F. Enriques, U. Amaldi, *Elementi di geometria* Edizioni Studio Tesi Srl, Zanichelli editore, 1992, cap. XII.
- [32] I. Rock, S. Palmer, *L'eredità della psicologia della Gestalt* Le Scienze n. **270** (1991) pagg. 60-66.
- [33] P. Di Lazzaro, D. Murra, *Luce e visione, un binomio (quasi) perfetto*, Energia, Ambiente e Innovazione n. 4 (2014) pagg. 58-63, <http://www.enea.it/it/seguici/pubblicazioni/pdf-eai/n-4-2014/Luceevisione.pdf>
- [34] A. Araújo, *A construction of the total spherical perspective in ruler, compass and nail*, Journal of Mathematics & The Arts vol. **12** (2018) pp. 144-169.
- [35] D. Murra, P. Di Lazzaro, *Immagine virtuale di specchi conici per anamorforesi: calcolo analitico ed esperimenti*, RT/2013/23/ENEA (2013)
<http://openarchive.enea.it/bitstream/handle/10840/4859/RT-2013-23-ENEA.pdf>
Vedi anche D. Murra, P. Di Lazzaro, *Analytical treatment and experiments of the virtual image of cone mirrors*, Applied Physics B vol. **117** (2014) pp. 145-150.
- [36] M. Gardner, *L'affascinante magia dell'arte anamorfica*, Rubrica Giochi Matematici de Le Scienze n. 81 vol. XIV (1975) pagg. 92-99.
- [37] La profondità di campo (PC) dell'occhio umano è definita come la massima variazione del defocheggiamento che non causa cambiamenti nella nitidezza dell'immagine. Oltre all'istintiva tendenza a chiudere l'iride per

accomodare a fuoco l'intera immagine, già discussa nel testo, la PC dell'occhio dipende da diversi parametri, tra cui la funzione ottica di trasferimento attraverso un dato set di frequenze spaziali, la densità locale di coni e bastoncelli sulla retina e la funzione di sensibilità al contrasto neuronale (che dipende dall'età). Di conseguenza, la PC dell'occhio umano non può essere stimata con precisione dall'equazione (7) che è valida per le macchine fotografiche. Ulteriori dettagli sono presentati nell'articolo B. Wang, K.J. Ciuffreda: *Depth-of-focus of the human eye: theory and clinical implications*, Survey of Ophthalmology vol. 51, (2006) pp. 75-85.

- [38] W.H. Ittleson, *The Ames demonstrations in perception*, Princeton University Press, 1952.
- [39] M. Hardy, S. Heyes, *Introduzione alla psicologia*, Feltrinelli, Milano, 1983 pagg. 79-81.
- [40] J.L. Hunt, *The channel anamorphosis*, Journal of Mathematics & The Arts vol. 3 (2009) pp. 19-31.
- [41] P. Accolti, *Lo Inganno degl' Occhi. Prospettiva Pratica*. Firenze 1625.
- [42] Filmati di vari oggetti anamorfici realizzati dagli autori e presentati nelle trasmissioni RAI Geo Scienza e RAI Scuola
http://195.110.133.122/media/20121004/20121004-RAI_3-GEO_SCIENZA_1705-185917236a.asf.intro.asf ;
www.tvrit.it/enea/20120228-RAI_3-COSE_DELLALTRO_GEO_1555-174503505a.ASF ;
www.raiscuola.rai.it/articoli-programma-puntate/sorprendentemente-illusioni-quotidiane-punt-5/31170/default.aspx
- [43] G.W. Leibniz, *Saggi di Teodicea sulla bontà di Dio, la libertà dell'uomo e l'origine del male*, a cura di S. Cariatì, Milano, Bompiani, 2005.
- [44] S. Zeki, quotato da M. Huang in *The Neuroscience of art*, Stanford Journal of Neuroscience vol. 2 (2009) pp. 24-26. <https://web.stanford.edu/group/co-sign/Huang.pdf>
- [45] P. Di Lazzaro, D. Murra, P. Vitelli, *The interdisciplinary nature of anamorphic images in a journey through art, history and geometry*, Journal of Mathematics & the Arts. In print (2019).

Crediti immagini

Figura 1. Immagine di pubblico dominio, tratta da

https://it.wikipedia.org/wiki/Pala_di_Brera#/media/File:Piero_della_Francesca_046.jpg

Figura 2. Immagine di pubblico dominio, tratta da

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Hans_Holbein_the_Younger_-_The_Ambassadors_-_Google_Art_Project.jpg

Figura 5. Tratta da A. Dürer, *Underweysung der Messung*, Nürnberg: s. n., 1525.

Figure 7, 16a e 22. Tratte da P. Di Lazzaro, D. Murra, *L'anamorfosi tra arte, percezione visiva e prospettive bizzarre*, RT/2013/05/ENEA (2013).

Figura 8, 9, 10. Tratta da P. Di Lazzaro, D. Murra: *Calcolo analitico del punto di osservazione nelle anamorfosi prospettiche: dimostrazione dell'assioma di Nicéron*, RT/2015/23/ENEA (2015).

Figure 11 e 18. Tratte da J.F. Nicéron, *La Perspective Curieuse, ou Magie Artificielle des Effets Merveilleux*, Paris, Chez Pierre Billaine, 1638.

Figure 13, 15 e 20. Tratte da D. Murra, P. Di Lazzaro, *Immagine virtuale di specchi conici per anamorfosi: calcolo analitico ed esperimenti*, RT/2013/23/ENEA (2013).

Figura 19. Licenza Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported.

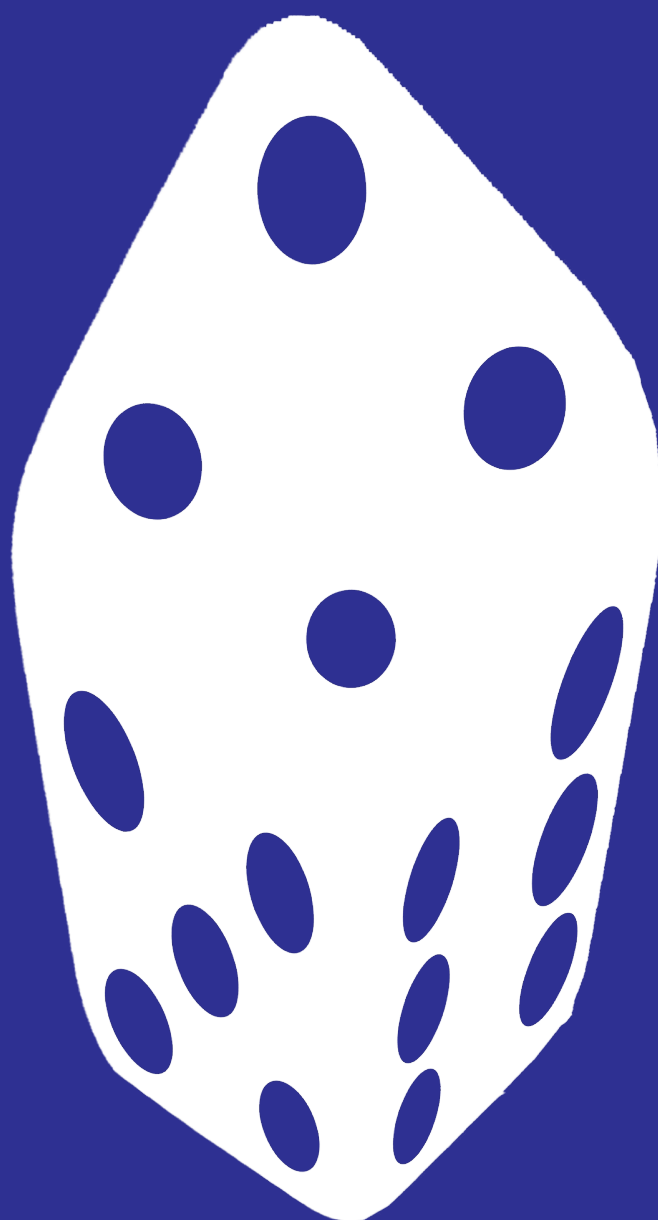
Figura 27. Tratta da <http://www.didatticarte.it/Blog/?p=1107>

Tutte le altre figure e foto sono state realizzate o rielaborate dagli autori.

ENEA – Servizio Promozione e Comunicazione

enea.it

Marzo 2019



ENEA

Agenzia nazionale per le nuove tecnologie,
l'energia e lo sviluppo economico sostenibile